100% EXOS

1re

NOUVEAU BAC

Maths

SPÉCIALITÉ

l'entraînement intensif !

- **220 EXERCICES** progressifs & minutés
- **30 SUJETS** de contrôle
- **CORRIGÉS** détaillés & commentés
- **COURS** & **MÉTHODES**

GRATUIT*: des ressources interactives et des parcours de révision sur annabac.com

Hatier

100% EXOS

1re

Maths

Spécialité

Sophie Barache
Professeur agrégée de mathématiques
au lycée Jean-Lurçat de Martigues

Fabrice Barache
Professeur agrégé de mathématiques
à l'école de l'air de Salon-de-Provence

Sophie Bauer
Professeur agrégée de mathématiques
au lycée Saint-Exupéry de La Rochelle

Raphaël Bauer
Professeur agrégé de mathématiques
au lycée Saint-Exupéry de La Rochelle

Hatier

Maquette de principe : Frédéric Jély
Mise en pages : Grafatom
Schémas : Grafatom
Édition : Julien Lionnet

Votre ouvrage 100 % exos

- Conforme au nouveau programme de Maths 1re (spécialité) entré en vigueur à la rentrée 2019, ce « 100 % exos » vous propose une **méthode de travail** complète et un **entraînement intensif** sur mesure, faisant une large place à la préparation du **nouveau bac**.
- Pour chaque thème du programme, vous trouverez un **COURS** structuré, les **MÉTHODES** qu'il faut maîtriser, des **EXERCICES** progressifs et leurs **CORRIGÉS** détaillés.
- Assortis d'**indications de solutions**, de **commentaires** et de **conseils** des auteurs, tous les exercices corrigés vous permettent :
  - de **comprendre** les notions essentielles et de maîtriser le cours ;
  - de **progresser** et de vous **entraîner** à votre rythme ;
  - de vous **évaluer** et de **réussir** vos devoirs et contrôles ;
  - de vous **préparer** à l'entrée en Terminale.

Le site de vos révisions

- L'achat de cet ouvrage vous permet de bénéficier d'un **ACCÈS GRATUIT*** à toutes les **ressources** d'annabac.com : fiches, quiz, sujets corrigés… et à ses **parcours de révision** personnalisés.
- Pour profiter de cette offre, rendez-vous sur **www.annabac.com**, dans la rubrique « Je profite de mon avantage client ».

* Selon les conditions précisées sur le site.

Sommaire

ANALYSE

PROBABILITÉS ET STATISTIQUES

8 Probabilités conditionnelles

9 Variables aléatoires

GÉOMÉTRIE

10 Calcul vectoriel et produit scalaire

11 Droites, cercles et paraboles

Algorithmique et programmation

1 Prise en main de Python

I INTRODUCTION

- On peut installer Python, en allant le télécharger sur le site officiel : https://www.python.org/.
- Lancer Python et créer un nouveau fichier (File> New File).
- Taper le code :

```
x=2
print(x,'est de type',type(x))

y=1/x
print(«l'inverse de «,x,» est «,y)
print(y,' est de type ',type(y))

z=True
print(z,' est de type ',type(z))
```

- Exécuter-le (Run>Run Module ou F5).

REMARQUES :

• x est de type entier (int), y est de type flottant (« nombre à virgule flottante », float) et z est de type booléen (boolean).
• En Python, toute ligne précédée du symbole # n'est pas exécutée : c'est un commentaire.

II FONCTION

➜ Voir la méthode 1 et les exos 5 et 7.

SYNTAXE :

La syntaxe Python pour la définition d'une fonction est la suivante :

```
def f(par1, par2,..) :
    y=
    return sortie1, sortie2
```

où :
• par1, par2,… désignent les paramètres en entrées ;
• sortie1, sortie2,… désignent les sorties retournées par la fonction.

Le décalage des instructions qui suivent la ligne def (on dit l'indentation) est essentiel en Python pour délimiter une fonction : habituellement l'indentation est de quatre espaces en Python.

Une fonction peut avoir plusieurs arguments en entrées :

EXEMPLE :

La fonction suivante renvoie la somme et le produit de deux nombres

```
def somme_produit(x,y):
   return x+y, x*y
# Un calcul
print('la somme et le produit de 2 par 3 valent respectivement',
     somme_produit(2,3))
```

Dans le cas où une fonction ne retourne aucune valeur, le return est facultatif.

III PROGRAMMATION

1. Instruction conditionnelle if

➜ Voir la méthode 2 et les exos 5 et 7.

SYNTAXE :

La syntaxe Python d'une instruction conditionnelle **if** est la suivante:

```
if condition 1 :
     Bloc 1 d'instructions à exécuter
elif condition 2 :
     Bloc 2 d'instructions à exécuter
....
else :
     Bloc d'instructions à exécuter
```

Comme pour les fonctions, après les mots-clés if, elif et else, l'indentation est obligatoire !

COMPARAISON :

Pour définir la condition permettant l'exécution de la clause if, on est amené à utiliser les opérateurs de comparaison.

En Python	Signification
x<y	x est inférieur strictement à y
x<=y	x est inférieur ou égal à y
x>y	x est supérieur strictement à y
x>=y	x est supérieur ou égal à y
x==y	x est égal à y
x !=y	x est différent de y

On peut aussi « combiner » ces opérateurs entre eux à l'aide des trois opérateurs suivants (appelés opérateurs booléens) : or (ou), and (et), not (non)

EXEMPLE :

$x < -2$ ou $x > 2$ s'écrit en Python : `(x<-2) or (x>2)`

$2 < x < 3$ s'écrit en Python sous la forme `(2<x) and (x<3)`, mais aussi : `2<x<3`.

2. Boucle itérative while

➜ Voir la méthode 3 et les exos 9 et 10

SYNTAXE :

La syntaxe Python d'une boucle itérative **while** est la suivante :

```
while condition :
    Bloc d'instructions à exécuter
```

Comme pour les fonctions, après le mot-clé while l'indentation est obligatoire !

3. Boucle itérative For

➜ Voir la méthode 4 et les exos 1 et 6.

SYNTAXE :

La syntaxe Python d'une boucle itérative **for** est la suivante :

```
for x in range (n):
    Bloc d'instructions à exécuter
```

où range(n) est un « itérateur » qui parcourt les entiers 0, 1, ... , n–1

Comme pour les fonctions, après le mot-clé for l'indentation est obligatoire !

IV LISTES

1. Définition élémentaire

Une liste est une collection d'éléments.

EXEMPLE :

```
nombres=[1,4,5] # liste d'entiers
couleurs=['rouge','bleu', 'jaune'] # liste de chaînes de caractères
melange=[1,'bleu',2,'vert'] # mixte
```

Remarques :

• Les éléments d'une liste ne sont pas obligatoirement du même type comme le montre l'exemple précédent.

• Les éléments d'une liste sont indexés à partir de 0 ; ainsi dans la liste nombres :

• `nombres[0]` correspond au premier élément de la liste nombres.

• `nombres[1]` correspond au deuxième élément de la liste nombres.

• `nombres[–1]` correspondant au dernier élément de la liste nombres.

2. Opérations sur les listes

Le tableau suivant donne quelques méthodes associées aux listes :

Méthode	Signification
len(liste)	Renvoie la longueur de liste
liste.append(x)	Ajoute l'élément x à la fin de liste
liste.insert(i,x)	Ajoute l'élément x en position i de liste
liste.count(x)	Compte le nombre d'occurrences de x dans liste
liste.remove(x)	Supprime la première occurrence de x dans liste
liste.sort()	Trie la liste dans l'ordre croissant
liste.sort(reverse=true)	Trie la liste dans l'ordre décroissant

3. Liste définie en compréhension

➜ Voir l'exo 8.

On voudrait construire le tableau de valeurs de la fonction carré suivant :

x	– 3	– 2	– 1,5	– 1	– 0,5	0	0,5	1	1,5	2	3
x^2											

En Python, on écrit alors :

```
# Tableau de valeurs de la fonction carrée
antecedents=[-3, -2,-1.5,-1,-0.5,0,0.5,1,1.5,2,3]
carres=[x**2 for x in antecedents]
print(carres)
```

Remarques :

- L'instruction list(range(n)) crée la liste des entiers de 0 à n–1.
- La syntaxe générale de la boucle for est :

```
for l in liste :
    bloc d'instructions à executer
```

On peut aussi associer une condition if à cette définition de liste :

EXEMPLE :

On veut calculer les images de la liste antécédents par la fonction inverse ; sachant que l'inverse de 0 n'existe pas, on écrit :

```
inverses=[1/x for x in antecedents if (x!=0)]
print(inverses)
```

V COMPLÉMENTS

1. Communication avec l'utilisateur

print() : permet d'afficher du texte et (ou) des valeurs de variables. Le texte à afficher doit être compris entre deux guillemets : “texte” ou entre deux apostrophes : ‘texte’.

input() : permet de demander à l'utilisateur d'entrer une valeur par exemple (et de l'enregistrer) ; elle s'utilise avec eval :

EXEMPLE :

```
n=eval(input('entrer un nombre '))
print('la multiplication de ',n,'par 3 vaut ',3*n)
```

2. Modules math et matplotlib

➜ Voir l'exo 3.

- Si Python reconnaît par défaut les **opérateurs arithmétiques** (+, –, *, /) et les puissances (par exemple, x**2), beaucoup de fonctions (comme cos et sin) et même la constante π ne sont pas reconnues par Python ; elles sont contenues dans le module math, qu'il faut importer avant de les utiliser.

EXEMPLE :

```
from math import * # importe tous les éléments du module math
print('la racine carrée de 2 vaut environ',sqrt(2))
print('la constante pi vaut environ',pi)
y=cos(pi/4)
print(y)
```

- Pour tracer des courbes représentatives de fonctions, on utilise le module matplotlib

EXEMPLE :

```
from matplotlib.pyplot import * # importe tous les éléments de matplotlib
antecedents=[-3+i/10 for i in range(60)]
carres=[x**2 for x in antecedents]
plot(antecedents,carres)
show()
close()
print(carres)
```

Pour installer maplotlib, sous Windows, ouvrir un terminal (taper cmd dans le menu rechercher) puis y entrer :

python -m pip install -U matplotlib.

MÉTHODE 1

Écrire un script permettant de calculer les images d'une fonction

➜ Voir les exos 5 et 7.

Exo résolu

a. Écrire un script permettant de calculer les images de la fonction f définie par.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \in [0\,;\,1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

b. Tester ce script en calculant les images de – 2 ; 0,25 et 7.

CORRIGÉ

a.

```
def f(x) :
    if x<0:
        return 0
    elif 0<=x<=1:
        return x
    else:
        return 1
```

Remarque : les clauses elif et else sont facultatives.

b.

Calculs de quelques images :

```
print("l'image de -2 par f est",f(-2))
print("l'image de 0.25 par f est",f(0.25))
print("l'image de 7 par f est",f(7))
```

MÉTHODE 2

Définir la fonction carré sur Python et la tester

➜ Voir l'exo 3.

Exo résolu

Définir la fonction carré sur Python et la tester en calculant les images de 2 et de –3.

CORRIGÉ

```
# Définition de la fonction carrée
def carre(x):
    return x**2
```

```
# Calcul de quelques images de la fonction carré
print('le carré de 2 est ',carre(2))
print('le carré de -3 est ',carre(3))
```

Comme précisé dans la syntaxe, une fonction peut avoir plusieurs paramètres en entrées et retourner plusieurs sorties.

MÉTHODE 3

Écrire un script qui détermine le premier entier vérifiant une condition

➜ Voir les exos 9 et 10.

Exo résolu

Écrire un script qui détermine le premier entier n tel que $2^n > 100$.

CORRIGÉ

```
n=0
while (2**n<100):
   n+=1
print('le 1er entier n tel que 2^n dépasse 100 est ',n)
```

L'instruction n+=1 est équivalente à n=n+1 (à chaque itération, elle incrémente de 1 la variable n).

MÉTHODE 4

Écrire un script qui affiche des entiers consécutifs

➜ Voir les exos 1 et 6.

Exo résolu

Écrire un script qui affiche tous les entiers de 1 à 4.

CORRIGÉ

```
for i in range(5):
   print('i vaut ',i)
```

L'instruction range(p,n) parcourt les entiers entre p et n – 1.

TESTER SES CONNAISSANCES

1 FOR À LA PLACE DE WHILE

★ | 10 min | ▶ P. 22

Réécrire les programmes suivants en remplaçant les boucles while par des boucles for :

a.

```
# somme des N premiers entiers
N=100
iteration=0
somme=0
while iteration<N :
    iteration+=1 # c'est-à-dire iteration=iteration+1
    somme+=iteration # c'est-à-dire
somme=somme+iteration
print('la somme des ',N,' premiers entiers vaut',somme)
```

b.

```
# somme des  entiers de P à N
P=10
N=100
iteration=P
somme=P
while iteration<N :
    iteration+=1 # c'est-à-dire iteration=iteration+1
    somme+=iteration # c'est-à-dire somme=somme+iteration
print('la somme des entiers compris entre ',P,' et ',N,' vaut',somme)
```

2 IMPORTANCE DE L'INDENTATION

★ | 5 min | ▶ P. 22

On veut trouver et afficher le plus petit entier naturel n tel que :

$$1 + 2 + \ldots + n > 10.$$

Pour cela, on écrit le script en Python suivant :

```
n=0
somme=0
while (somme<100):
    n+=1
somme+=n
print('le plus petit entier n tel que 1+2+...+ n dépasse  100 est ',n)
```

a. Que se passe-t-il quand on l'exécute ?

b. Comment corriger ce problème ?

3 COURBES REPRÉSENTATIVES

★★ | 20 min | P. 23

Écrire un script en Python permettant de tracer les courbes représentatives des fonctions carré, cube, racine carrée sur [0 ; 1,5]. Choisir un pas de 0,01.

Voir le paragraphe V.2 du cours.

S'ENTRAÎNER

4 DÉTERMINANT DE DEUX VECTEURS

★ | 15 min | P. 23

a. On rappelle que si $\vec{u}(x\,;y)$ et $\vec{v}\left(x'\,;y'\right)$ sont deux vecteurs du plan repéré alors le déterminant de ces deux vecteurs est le réel :

$$\det(\vec{u}\,;\vec{v}) = xy' - x'y\ .$$

À quoi sert le déterminant ? Donner des exemples.

b. Étant donné deux vecteurs, écrire une fonction, en Python, qui retourne le déterminant de ces deux vecteurs.

On utilisera des listes pour les coordonnées des vecteurs.

5 DÉ TRUQUÉ

★★ | 25 min | P. 24

On considère un dé truqué de la manière suivante : on a une chance sur deux d'obtenir 6 et toutes les autres faces ont la même chance d'être obtenues.

a. Déterminer la probabilité d'obtenir chacune des faces.

b. Le script suivant simule le lancer un tel dé :

```
from random import randint
def de_truque() :
    alea=randint(1,10)
    if alea==1:
        return 1
    elif alea==2:
        return 2
    elif alea==3:
        return 3
    elif alea==4:
        return 4
    elif alea==5:
        return 5
    else:
        return 6
```

En simulant 100 000 fois ce lancer de dé, déterminer les fréquences d'obtenir chacune des faces, puis les comparer aux probabilités correspondantes.

> Définir ces fréquences dans une liste appelée simulation et utiliser la méthode simulation.count(n) pour compter le nombre d'occurrence de n.

6 CYCLISTE

★★ | 25 min | ▸ P. 24

La première semaine de son entrainement, un cycliste parcourt 100 km. Chaque semaine, il augmente de 20 km.
Combien aura-t-il parcouru de km au bout de 10 semaines ?
Écrire un script en Python permettant de résoudre ce problème.

> Utiliser une boucle for.

PRÉPARER UN CONTRÔLE

7 ÉQUATION DU PREMIER DEGRÉ

★★ | 30 min | ▸ P. 24

a. Résoudre (papier et crayon) les équations :

$$3x + 1 = 0 \,;\, 0x + 1 = 0 \quad \text{et} \quad 0x + 0 = 0.$$

b. En déduire, suivant les valeurs des réels a et b, les solutions de l'équation $ax + b = 0$.

c. Écrire, en Python, une fonction qui affiche les solutions de l'équation du premier degré $ax + b = 0$.

> Utiliser l'instruction conditionnelle if.

8 NOMBRES PREMIERS

★★★ | 30 min | ▸ P. 25

On rappelle qu'un entier supérieur ou égal à 2 est dit premier s'il n'admet pas d'autres diviseurs que 1 et lui-même.

a. Écrire une fonction « test_premier » qui, à un entier n, renvoie « vrai » s'il est premier et « faux » sinon. La tester pour n=5, 12, 31, 2019.

> **En Python**
> n % d retourne le reste de la division euclidienne de n par d.
> Vrai s'écrit True et faux, False.

b. Donner la liste des entiers premiers compris entre 2 et 100.

> Utiliser ici la définition par compréhension d'une liste.

ALLER PLUS LOIN

9 BALAYAGE

★★★ | 30 min | ▶ P. 26

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f(x) = x^2 - 2 .$$

On sait que f est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}^+$: $\sqrt{2}$.

1. Calculer $f(1)$ et $f(2)$.

Qu'en déduit-on pour $\sqrt{2}$?

2. On veut, à l'aide de Python, déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près par défaut de $\sqrt{2}$.

Pour cela , on considère l'algorithme dît de balayage suivant :

```
a ← 1
Approx ← 1
pas ← 0.01
Tant que f(Approx) et f(a) sont de même signe Faire
          Approx ← Approx+ pas
Fin Tant que
Afficher Approx
```

a. Si on souhaite une valeur approchée, par défaut, à 0,001 près, quelle ligne de cet algorithme doit-on modifier ?

b. Si on souhaite une valeur approchée, par exès, à 0,01 près, quelles lignes de cet algorithme doit-on modifier ?

c. Écrire cet algorithme en Python et le tester.

Pour tester si deux nombres sont de même signe ou non, il suffit de connaître le signe de leur produit.

10 DICHOTOMIE

★★★ | 30 min | ▶ P. 26

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f(x) = x^2 - 2 .$$

On sait que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}^+$: c'est $\sqrt{2}$ qui comprise entre 1 et 2.

On rappelle l'algorithme de dichotomie vu en Seconde permettant de donner un encadrement de $\sqrt{2}$ d'amplitude inférieure à une précision donnée :

```
a ← 1
b← 2
precision ← 0.01
Tant que b-a>precision Faire
                c← (a+b)/2
    si f(c) et f(a) sont de même signe alors
                a ← c
    sinon faire
                b ← c
Fin Tant que
Afficher a,b
```

Écrire en Python cet algorithme et le tester.

CORRIGÉS

1 FOR A LA PLACE DE WHILE

a.

```
# somme des N premiers entiers
N=100
somme=0
for iteration in range(N+1) :
        somme+=iteration
print('la somme des ',N,' premiers entiers vaut',somme)
```

b.

```
# somme des entiers de P à N
P=10
N=100
somme=0
for iteration in range(P,N+1) :
        somme+=iteration
print('la somme des entiers compris entre ',P,' et ',N,' vaut',somme)
```

Lorsque l'on connaît le nombre d'itérations, on utilise plutôt une boucle for qu'une boucle while.

2 IMPORTANCE DE L'INDENTATION

a. Le script ne s'arrête pas car la ligne `somme+=n` ne fait pas partie de la boucle, donc la condition d'arrêt n'est jamais vérifiée : l'indentation est essentielle !

b. On doit écrire :

```
n=0
somme=0
while (somme<100):
        n+=1
        somme+=n
print('le plus petit entier n tel que 1+2+...+ n dépasse 100 est ',n)
```

3 COURBES REPRÉSENTATIVES

```
# Tracés de quelques fonctions usuelles
from matplotlib.pyplot import *
from math import *
antecedents=[0+i/100 for i in range(151)]
carre=[x**2 for x in antecedents]
cube=[x**3 for x in antecedents]
racine=[sqrt(x) for x in antecedents]
plot(antecedents,carre, label="y=x^2")
plot(antecedents,cube, label="y=x^3")
plot(antecedents,racine, label="y=racine(x)")
legend()
show()
close()
```

4 DÉTERMINANT DE DEUX VECTEURS

a. Le déterminant permet de savoir si deux vecteurs sont colinéaires ou non :

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires, si et seulement si, } \det(\vec{u}\,;\vec{v}) = 0\,.$$

Par exemple :

• Si $\vec{u}(2\,;3)$ et $\vec{v}\left(-5\,;\dfrac{-15}{2}\right)$,

alors $\det(\vec{u}\,;\vec{v}) = 2\times\left(\dfrac{-15}{2}\right) - 3\times(-5) = -15+15 = 0$

Les vecteurs sont donc colinéaires

• Si $\vec{u}(2\,;3)$ et $\vec{v}(-5\,;0)$,

alors $\det(\vec{u}\,;\vec{v}) = 2\times 0 - 3\times(-5) = 15 \neq 0$

Les vecteurs ne sont donc pas colinéaires.

b.

```
def determinant(u,v):
        return u[0]*v[1]-u[1]*v[0]
# Tests
u=[2,3]
v=[-5,-15/2]
print("le déterminant de ",u," et de ",v," est ",determinant(u,v))
v=[-5,0]
print("le déterminant de ",u," et de ",v," est ",determinant(u,v))
```

5 DÉ TRUQUÉ

a. On note p la probabilité commune aux faces 1, 2, 3, 4 et 5.

Sachant que la probabilité d'obtenir 6 est $\frac{1}{2}$ et que la somme des probabilités des évènements élémentaires est 1 alors :

$$p+p+p+p+p+\frac{1}{2}=1 \Leftrightarrow 5p=\frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow p=\frac{1}{10}.$$

b. Pour simuler 100 000 fois ce dé truqué, on entre le code suivant :

```
nbre_simul=100000
simulation=[de_truque() for x in range(1,nbre_simul+1)]
for n in range(1,7):
        print('la fréquence de la face ',n,' est', simulation.count(n)/nbre_simul)
```

On vérifie que les fréquences sont proches des probabilités correspondantes que l'on a déterminées à la question précédente.

6 CYCLISTE

Le script est le suivant :

```
distance=100
for semaine in range(2,11):
        distance+=20
print(distance)
```

La 10^e semaine, le cycliste parcourra **280 km.**

7 ÉQUATION DU PREMIER DEGRÉ

a. $3x+1=0 \Leftrightarrow 3x=-1$
$$\Leftrightarrow x=-\frac{1}{3}.$$

$0x+1=0 \Leftrightarrow 1=0$: impossible l'équation n'admet donc pas de solution.
$0x+0=0 \Leftrightarrow 0=0$: cette égalité est toujours vraie : tous les réels sont solutions.

b. Si $a \neq 0$ alors l'équation $ax+b=0$ admet pour unique solution $-\frac{b}{a}$.

Sinon :

si $b \neq 0$, alors l'équation $ax+b=0$ n'admet pas de solution
si $b=0$, alors tout réel est solution de l'équation $ax+b=0$.

c.

```
def equation_premier_degre(a,b):
if (a!=0):
        print("la solution de l'équation est",-b/a)
elif (b!=0):
        print("l'équation n'admet pas de solution")
else:
        print("tous les réels sont solutions de l'équation")
# Tests
equation_premier_degre(3,1)
equation_premier_degre(0,1)
equation_premier_degre(0,0)
```

8 NOMBRES PREMIERS

a.

```
def test_premier(n):
    if n < 2:
        return False
    for diviseur in range (2,n):
        if n%diviseur == 0:
            return False
    return True
# Tests
liste=[5,12,31,2019]
for n in liste:
 print(«l'entier «,n,»est premier»,test_premier(n))
```

b. On ajoute le code suivant à la suite du script :

```
listepremier=[n for n in range(2,101) if test_premier(n)==True]
print(listepremier)
```

9 BALAYAGE

1. $f(1) = 1$ et $f(2) = 4$ et puisque f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, on a : $1 < \sqrt{2} < 2$.

2. a. On remplace la ligne : pas ← 0.01 par : pas ← 0.01

b. On remplace la ligne :

a ← 1 par : a ← 2

Approx ← 1 par : Approx ← 2

pas ← 0.01 par : pas ← - 0.01

c.

```
a=1
approx=1
pas=0.01
while (approx**2-2)*(a**2-2)>0:
    approx+=pas
print('Une valeur approchée à ',pas,' près est ',approx)
```

10 DICHOTOMIE

```
a=1
b=2
precision=0.01
while (b-a)>precision:
    c=(a+b)/2
    if (c**2-2)*(a**2-2)>0:
        a=c
    else:
        b=c
print('Racine carrée de 2 est compris entre ',a,' et ',b)
```

Algèbre

2 Suites numériques

I NOTION DE SUITE

1. Définition et vocabulaire

- Une **suite** est une fonction définie sur $\mathbb{N}$ ou sur une partie de $\mathbb{N}$.
- L'image d'un entier $\times$ par la fonction u est notée u_n ou $u(n)$.
- On dit que u_n est le **terme d'indice** n de la suite.
- La suite constituée des termes u_n est notée (u_n).

Si le premier terme est u_0, alors u_n est le $(n+1)^e$ terme de la suite (u_n).
Si le premier terme est u_1, alors u_n est le n-ième terme de la suite.

- Une suite est généralement définie :
  - soit par une relation explicite du type $u_n = f(n)$;
  - soit par son premier terme et une **relation de récurrence** du type : $u_{n+1} = f(u_n)$.

Voir la méthode 1 pour le calcul des premiers termes.

2. Sens de variation d'une suite

- Une suite est strictement croissante si pour tout n : $u_n < u_{n+1}$.
- Une suite est strictement décroissante si pour tout n : $u_n > u_{n+1}$.

II SUITES ARITHMÉTIQUES

1. Définition

- Une **suite arithmétique** est une suite dont chaque terme s'obtient en ajoutant au terme précédent un même nombre réel, appelé **raison**.

Une suite arithmétique (u_n) est entièrement définie par la donnée de son premier terme u_0 (ou u_1 ...) et de sa raison, notée r.

- Une suite (u_n) est **arithmétique** si, et seulement si, la différence $\boldsymbol{u_{n+1} - u_n}$ **est constante**.

2. Calcul du terme d'indice *n*

- Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0.

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{u_n = u_0 + nr}$$

Voir la démonstration dans l'exercice 4.

- Si le premier terme est u_1, la formule devient, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{u_n = u_1 + (n-1)r}$$

- Plus généralement, pour tout $n \geqslant p$:

$$\boxed{u_n = u_p + (n-p)r}$$

Cette propriété permet d'obtenir directement n'importe quel terme de la suite (voir la méthode 2).

3. Allure et comportement asymptotique

Les formules donnant u_n en fonction de n sont celles d'une fonction affine de coefficient directeur r, d'où les propriétés suivantes :

PROPRIÉTÉS :

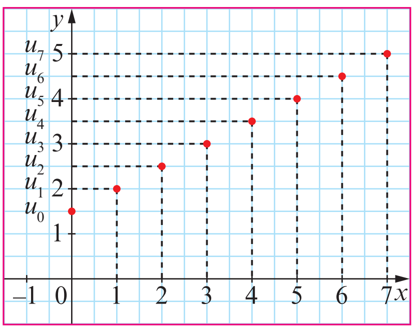
Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r. Alors :

- (u_n) est strictement croissante $\Leftrightarrow r > 0$
- (u_n) est strictement décroissante $\Leftrightarrow r < 0$
- Les points de coordonnées $(n\,;u_n)$ sont alignés.

EXEMPLES :

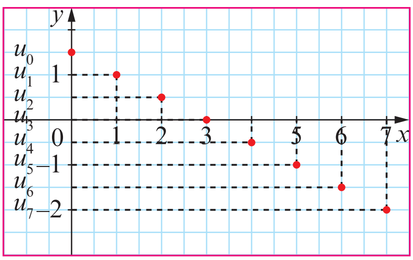
- **Suite arithmétique avec $r > 0$.**

Les termes de la suite tendent vers $+\infty$.



- **Suite arithmétique avec $r < 0$.**

Les termes de la suite tendent vers $-\infty$.



4. Somme des premiers termes d'une suite

Soit n un entier naturel non nul, alors :

$$\boxed{1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}}$$

Voir la démonstration dans l'exercice 4.

PROPRIÉTÉS :

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.
Notons S_n la somme de tous les termes d'indice inférieur ou égal à n.

- Si le premier terme est u_0, alors : $\boxed{S_n = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}}$

• Si le premier terme est u_1, alors $\boxed{S_n = n \times \frac{u_1 + u_n}{2}}$

De manière générale, la somme S de termes **consécutifs** d'une suite **arithmétique** est donnée par la formule :

$$\boxed{S = (\text{nombre de termes}) \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}}$$

Voir la méthode 3.

III SUITES GÉOMÉTRIQUES

1. Définition

◗ Une **suite géométrique** est une suite dont chaque terme s'obtient en multipliant le précédent par un même nombre, appelé **raison**.
Une suite géométrique (v_n) est entièrement définie par la donnée de son premier terme et de sa raison, notée q.
◗ Une suite (v_n) dont tous les termes sont non nuls est **géométrique** si, et seulement si, le **quotient** $\boldsymbol{\frac{v_{n+1}}{v_n}}$ **est constant**.

2. Calcul du terme d'indice *n*

PROPRIÉTÉ :

• Soit (v_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme v_0.
Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{v_n = v_0 \times q^n}$$

• Si le premier terme est v_1, la formule devient, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{v_n = v_1 \times q^{n-1}}$$

• Plus généralement, pour tout $n \geqslant p$:

$$\boxed{v_n = v_p \times q^{n-p}}$$

Cette propriété permet de calculer n'importe quel terme de la suite (voir la méthode 2).

3. Allure et comportement asymptotique

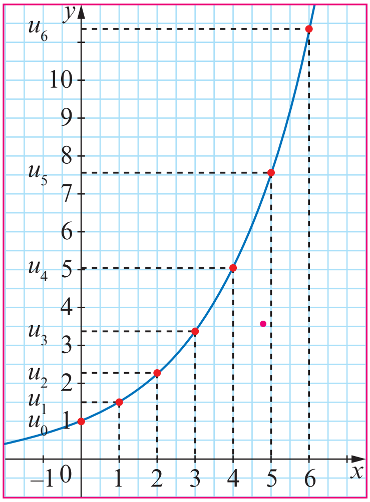
PROPRIÉTÉ :

• La suite géométrique (q^n) est strictement croissante $\Leftrightarrow q > 1$.
• La suite géométrique (q^n) est strictement décroissante $\Leftrightarrow 0 < q < 1$.

EXEMPLES :

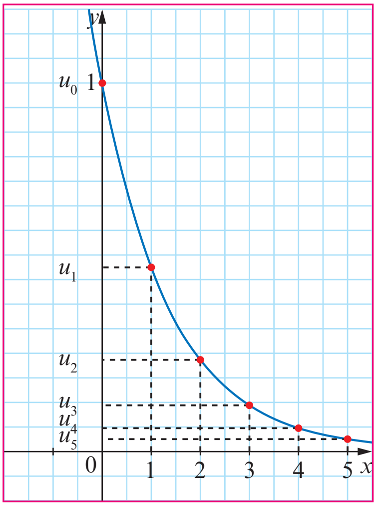
- **Suite géométrique avec $q > 1$ et $u_0 > 0$.**

On remarque que les termes de la suite tendent vers $+\infty$.



- **Suite géométrique avec $0 < q < 1$ et $u_0 > 0$.**

On remarque que les termes de la suite tendent vers $\mathbf{0}$.



Une suite géométrique de raison $q > 0$ a une croissance ou décroissance dite exponentielle.

Voir chapitre 6 sur la fonction exponentielle.

4. Somme des premiers termes d'une suite

Soit n un entier naturel non nul. Si $q \neq 1$, alors :

$$\boxed{1 + q + \ldots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}}$$

Voir la démonstration dans l'exercice 11.

PROPRIÉTÉ :

Soit (v_n) une suite géométrique de raison $q \neq 1$. Notons S_n la somme de tous les termes d'indice inférieur ou égal à n.

- Si le premier terme est v_0, alors $\boxed{S_n = v_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}}$

- Si le premier terme est v_1, alors $\boxed{S_n = v_1 \times \frac{1 - q^n}{1 - q}}$

De manière générale, la somme S de termes **consécutifs** d'une suite **géométrique** de raison $q \neq 1$ est donnée par la formule :

$$\boxed{S = (\text{premier terme}) \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}}$$

MÉTHODE 1

Calculer les premiers termes d'une suite

➜ Voir les exos 1, 10 et 14.

Le calcul des termes d'une suite dépend du mode de génération de la suite.

• Si la suite est définie par une relation du type $u_n = f(n)$, on calcule successivement les images des entiers demandés.

n	0	1	2	3	4
$u_n = f(n)$	$u_0 = f(0)$	$u_1 = f(1)$	$u_2 = f(2)$	$u_3 = f(3)$	$u_4 = f(4)$

Le premier terme n'est pas forcément u_0 : la suite peut débuter avec $n \geqslant 1$.

• Si la suite est définie par une relation de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$, on part du premier terme donné, et on calcule de proche en proche les images par la fonction f des termes de la suite.

u_n	u_0 est donné	u_1 obtenu	u_2 obtenu	u_3 obtenu
$u_{n+1} = f(u_n)$	$u_1 = f(u_0)$	$u_2 = f(u_1)$	$u_3 = f(u_2)$	$u_4 = f(u_3)$

Exo résolu

Calculer les quatre premiers termes des suites suivantes :

a. $(u_n) : \begin{cases} u_0 = 3 \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2 - u_n \end{cases}$

b. $(v_n) : \begin{cases} v_1 = -2 \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ v_{n+1} = (v_n)^2 \end{cases}$

c. (w_n) : pour tout $n \geqslant 3$, $w_n = 2^n$

CORRIGÉ

a. La suite est définie par une relation de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$, avec $f(x) = 2 - x$.

Le premier terme est $u_0 = 3$.

On part de $u_0 = 3$.

Ensuite, la relation de récurrence donne :

• $n = 0 : u_{0+1} = 2 - u_0$, c'est-à-dire $u_1 = 2 - u_0 = 2 - 3 = \mathbf{-1}$.

• $n = 1 : u_{1+1} = 2 - u_1$, c'est-à-dire $u_2 = 2 - u_1 = 2 - (-1) = \mathbf{3}$.

• $n = 2 : u_{2+1} = 2 - u_2$, c'est-à-dire $u_3 = 2 - u_2 = 2 - 3 = \mathbf{-1}$.

b. La suite est définie par une relation de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$, avec $f(x) = x^2$.

Attention, le premier terme est $v_1 = -2$.

On part de $v_1 = -2$. Ensuite, la relation de récurrence donne :

- $n = 1 : v_2 = v_1^2 = (-2)^2 = \mathbf{4}$.
- $n = 2 : v_3 = v_2^2 = \mathbf{16}$.
- $n = 3 : v_4 = v_3^2 = \mathbf{256}$.

c. La suite est définie par une relation du type $u_n = f(n)$, avec $f(x) = 2^x$.

Attention, (w_n) est définie pour tout $n \geqslant 3$, donc son premier terme est $w_3 = 2^3 = 8$.

De même, $w_4 = 2^4 = \mathbf{16}$; $w_5 = 2^5 = \mathbf{32}$; $w_6 = 2^6 = \mathbf{64}$.

MÉTHODE 2

Calculer le terme d'indice *k* d'une suite arithmétique ou géométrique

➜ **Voir les exos 1, 2, 3 et 9.**

Étape 1. Déterminer si la suite est arithmétique ou géométrique.
Étape 2. Utiliser la formule du cours donnant le terme d'indice n.
Étape 3. Remplacer n par la valeur k donnée.

Exo résolu

Calculer u_{10} pour les suites suivantes :

a. La suite (u_n) est définie par $\begin{cases} u_0 = 64 \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N},\quad u_{n+1} = -\dfrac{u_n}{2}. \end{cases}$

b. La suite (v_n) est définie par $\begin{cases} v_1 = 18 \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\quad v_{n+1} = \dfrac{3v_n - 1}{3}. \end{cases}$

CORRIGÉ

a. Étape 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = -\dfrac{1}{2}u_n$.

La suite (u_n) est donc géométrique de raison $-\dfrac{1}{2}$.

Étape 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times q^n$,

soit pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 64 \times \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$.

Étape 3. $u_{10} = 64 \times \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{10} = 2^6 \times \left(+\dfrac{1}{2^{10}}\right) = \dfrac{1}{2^4} = \mathbf{\dfrac{1}{16}}$.

b. Étape 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_{n+1} - v_n = \frac{3v_n - 1}{3} - \frac{3v_n}{3} = -\frac{1}{3}.$$

La suite (v_n) est donc arithmétique de raison $-\frac{1}{3}$.

Étape 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = v_1 + r \times (n-1)$,

soit $v_n = 18 - \frac{1}{3} \times (n-1)$.

Étape 3. $v_{10} = 18 - \frac{1}{3} \times 9 = \mathbf{15}$.

MÉTHODE 3

Calculer la somme des termes d'indice inférieur ou égal à k

→ Voir les exos 5, 6, 7, 9, 12.

Étape 1. Déterminer si la suite est arithmétique ou géométrique.

Étape 2. Si la suite est arithmétique, exprimer u_n en fonction de n et calculer u_k d'après la formule du cours.

Si la suite est géométrique, il est inutile de connaître u_k pour calculer la somme cherchée.

Étape 3. On note S_k la somme des termes d'indice inférieur ou égal à k. Exprimer S_n en fonction de n avec une formule du cours, puis calculer S_k.

Exo résolu

Calculer S_{10} pour les suites données dans la méthode 2.

CORRIGÉ

a. Étape 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n$,

la suite (u_n) est donc géométrique de raison $-\frac{1}{2}$.

Étape 2. Inutile pour une suite géométrique.

Étape 3. $q = -\frac{1}{2} \neq 1$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n = u_0 + \ldots + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1-q}.$$

$$S_n = 64 \times \frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = 64 \times \frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{3}{2}}$$
$$= \frac{128}{3} \times \left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right).$$

En particulier,

$$S_{10} = \frac{128}{3} \times \left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{11}\right) = \mathbf{\frac{128}{3} \times \left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^{11}\right)}.$$

b. Étape 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} - v_n = \frac{3v_n - 1}{3} - \frac{3v_n}{3} = -\frac{1}{3}$,

la suite (v_n) est donc arithmétique de raison $-\frac{1}{3}$.

Étape 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = v_1 + r \times (n-1)$,

soit $v_{10} = 18 - \frac{1}{3} \times 9 = 15$.

Étape 3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = v_1 + \ldots + v_n = n \times \frac{v_1 + v_n}{2}$.

Donc en particulier,

$$S_{10} = 10 \times \frac{18+15}{2} = 5 \times 33 = \mathbf{165}.$$

MÉTHODE 4

Déterminer le sens de variation d'une suite

→ Voir les exos 4, 11, 12, 15.

Étape 1. Déterminer si la suite est arithmétique ou géométrique.

Étape 2. Identifier la raison de la suite.

Étape 3. :

- Si la suite est arithmétique, conclure selon que la raison est positive ou négative ;
- Si la suite est géométrique, conclure à l'aide de ce tableau :

	Raison $q < 0$	Raison $0 < q < 1$	Raison $q > 1$
Premier terme $u_0 < 0$	Ni croissante, ni décroissante	Croissante	Décroissante
Premier terme $u_0 > 0$		Décroissante	Croissante

Exo résolu

Déterminer le sens de variation des suites suivantes définies sur $\mathbb{N}$:

a. (u_n) : $u_n = -5 - 3n$.

b. (v_n) : $\begin{cases} v_0 = 12 \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} = \dfrac{v_n}{2}. \end{cases}$

CORRIGÉ

a. Étape 1. $u_n = -5 - 3n$ est de la forme $u_n = u_0 + r \times n$ avec $r = -3$ et $u_0 = -5$ donc (u_n) est une suite arithmétique.

Étape 2. Sa raison est -3 , et $-3 < 0$.

Étape 3. La suite (u_n) est strictement décroissante.

b. Cette suite est définie par une relation de récurrence correspondant à une suite géométrique car :

$$v_{n+1} = \frac{1}{2} \times v_n .$$

Sa raison est $\frac{1}{2}$ et $0 < \frac{1}{2} < 1$

tandis que son premier terme est positif.

La suite (v_n) est donc strictement décroissante.

TESTER SES CONNAISSANCES

1 CALCUL DE u_{50}

★ | 10 min | ▸ P. 48

Calculer u_1, u_2 et u_{50} (terme d'indice 50) de la suite (u_n) définie par :

a. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sqrt{2n^2 + 4n + 1}$;

b. pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 3 - \dfrac{2}{n}$;

c. $\begin{cases} u_0 = 7 \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = 3 ; \end{cases}$

d. $\begin{cases} u_1 = -3 \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = -2. \end{cases}$

Voir la méthode 2. Pour les suites récurrentes (c. et d.), attention au premier terme.

2 SUITES ARITHMÉTIQUES

★ | 10 min | ▸ P. 48

Dans les cas suivants, (u_n) est une suite arithmétique définie sur $\mathbb{N}$ et de raison r. Déterminer son premier terme et sa raison, puis calculer u_{20}.

a. $u_4 = 12$ $u_9 = -8$ **b.** $u_{27} = 7$; $u_{10} = \dfrac{15}{7}$

Exprimer u_n en fonction de u_0 et r (voir le cours, II.2).

3 SUITES GÉOMÉTRIQUES

★ | 15 min | ▸ P. 49

Les suites (u_n) suivantes sont géométriques de raison q.

a. On donne $u_1 = 5$ et $q = -3$. Calculer u_2 et u_{15}.

b. Calculer la raison et le premier terme u_0 de la suite telle que $u_5 = -20$ et $u_9 = -80$ (il peut y avoir plusieurs réponses possibles). Calculer u_{24}.

c. Calculer la raison de la suite telle que $u_5 = 8$ et $u_8 = 27$. Calculer u_{15}.

Exprimer u_n en fonction de u_5 et q (voir le cours, III.2).

4 MONOTONIE ?

★ | 10 min | ▸ P. 50

Déterminer le sens de variation des suites suivantes, définies pour $n \in \mathbb{N}$:

a. $u_n = (n-1)^2 - n^2$ **b.** $u_n = -5 \times (-2)^n$

c. $u_n = \dfrac{5}{3^n}$ **d.** (u_n) : $\begin{cases} u_0 = -\dfrac{1}{2} \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n = \dfrac{7}{2} \end{cases}$

Voir la méthode 4.

5 SOMMONS

★★ | 20 min | ▶ P. 50

1. Restitution de connaissances

a. Démontrer que : $1+2+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

On démontrera que $2\times(1+2+\ldots+n)=n(n+1)$ en remarquant que $1+n=2+n-1=3+n-2\ldots$ etc.

b. En déduire la somme des $(n+1)$ premiers termes d'une suite arithmétique de premier terme u_0.

2. Calculer les sommes suivantes :

a. $S_1=19+20+21+\ldots+100$.

b. $S_2=6-42+294-\ldots+34\,588\,806$.

c. $S_3=-3+1+5+\ldots\ldots\ldots+57$.

Il faut d'abord trouver la logique sous-tendant ces sommes (vu que certains nombres sont sous-entendus dans les pointillés) : on sait calculer la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique ou géométrique (voir la méthode 3). Cherchez en priorité dans ces directions.

S'ENTRAÎNER

6 RADIOACTIVITÉ

★★ | 20 min | ▶ P. 51

Le tritium (T ou ${}^3H$) est – comme le deutérium – l'un des isotopes de l'hydrogène. C'est un élément radioactif, dont la période ou demi-vie est de 12,32 ans, c'est-à-dire que la moitié de ses atomes se désintègrent naturellement en 12,32 années. Le tritium est, avec le carbone 14, l'un des deux radionucléides les plus émis dans l'environnement (en grande partie libéré dans l'air et l'eau) par les installations nucléaires en fonctionnement normal. L'usine de la Hague, pour l'année 2002, a rejeté environ 33 g de tritium sous forme liquide et 0,17 g sous forme gazeuse (source Areva NC).

Partie A. On note $u_0=33$ g la quantité de tritium libérée en 2002 sous forme liquide, et u_n la quantité de tritium restant au bout de $n\times 12{,}32$ ans, exprimée en grammes.

1. Donner la relation entre u_{n+1} et u_n.

2. En déduire la nature de la suite (u_n).

3. Exprimer u_n en fonction de n.

Voir le cours, paragraphe III.2.

4. Au bout de combien de temps reste-t-il dans l'environnement moins de 1 g de tritium sur les 33 g libérés en 2002 ?

Partie B. Pour simplifier le problème, on considère que 5,5 % du tritium se désintègrent chaque année.
On appelle v_n la quantité de tritium restant au bout de n années.
1. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0{,}945$ et de premier terme $v_0 = 33$.

> Exprimer v_{n+1} à l'aide de v_n.

2. Écrire un algorithme en Python permettant de calculer v_n pour une année donnée par l'utilisateur.
Il faudrait alors 62 ans pour arriver à moins de 1 g de tritium sur la quantité libérée en 2002. Supposons que l'usine rejette chaque année 33 g de tritium liquide.
3. Quelle serait la quantité de tritium présente dans l'environnement fin 2003 sur les rejets de 2002 et 2003 ?
4. Quelle serait la quantité de tritium présente dans l'environnement fin 2004 sur les rejets de 2002 à 2004 ?
5. Quelle serait la quantité de tritium présente dans l'environnement fin 2064 sur les rejets de 2002 à 2064 ?

> Voir la méthode 3.

7 EMPRUNT

★★★ | 15 min | ▸ P. 52

On emprunte 15 000 € aux conditions suivantes : chaque mois, on rembourse 6 % d'intérêts sur le capital restant dû, plus 500 euros de capital.
On appelle u_n la n^{e} mensualité pour $n \in \mathbb{N}^*$.
a. Calculer u_1, u_2 et u_3.

> Chaque mois, le capital à rembourser diminue de 500 euros.

b. Compléter l'algorithme en Python suivant permettant de calculer la somme remboursée au bout de *n* mois, *n* étant donné par l'utilisateur :

```
from math import*
n = int(input("Entrer le nombre de mois écoulés :")
S = 0
C = 15000
for i in range(n):
    u = ...
    S = ...
    C = ...
print ("La somme totale versée est :", S, "euros")
```

c. Quelle est la nature de la suite (u_n) ? On pourra appeler C le capital restant avant la n^e mensualité et calculer $u_{n+1} - u_n$.

Cette méthode permet de prouver qu'il s'agit d'une suite arithmétique.

d. Exprimer u_n en fonction de n, puis déterminer le rang N pour lequel le capital sera remboursé. Quel sera le montant de la dernière mensualité ?
e. Quelle est la somme remboursée au total ?
Quel est le coût de cet emprunt ?

Voir la méthode 3.

8 INCONNUE ★★★ 10 min ▸ P. 53

Déterminer quatre termes consécutifs d'une suite arithmétique, sachant que leur somme est -2 et la somme de leurs carrés est 46.

9 ÉCONOMISONS ★★ 25 min ▸ P. 54

Jean reçoit de l'argent de poche chaque semaine. La première semaine, il reçoit 5 €, puis chaque semaine, la somme reçue est augmentée de 20 cents.
1. On appelle u_0 la somme reçue la première semaine : $u_0 = 5$.
Démontrer que la somme reçue chaque semaine correspond aux termes successifs d'une suite arithmétique dont on donnera la raison.
2. Exprimer u_n en fonction de n, puis calculer u_{20}.
3. Représenter graphiquement la suite (u_n) en prenant pour échelle : 1 cm pour 2 unités en abscisse et 1cm pour 1€ en ordonnées.
4. a. À l'aide du graphique, conjecturer à partir de quand Jean touchera plus de 10 € par semaine.
b. On rédige un algorithme en langage naturel pour déterminer le nombre n de semaines nécessaires :

```
u ← 5
n ← 0
tant que u < 10 faire
        n ← n+1
        u ← u+0,2
```

Modifier cet algorithme pour que l'utilisateur choisisse le seuil qu'il souhaite atteindre.
c. Déterminer par le calcul à partir de quelle semaine Jean touchera plus de 10 € par semaine.
5. Jean souhaite s'acheter un blouson à 150 € en économisant tout son argent.
a. Déterminer l'inéquation d'inconnue n permettant de répondre au problème sans chercher à la résoudre.

Cette inéquation étant du second degré, on attendra d'avoir traité le chapitre 3 pour pouvoir la résoudre algébriquement.

b. À l'aide d'un algorithme programmé en Python sur votre calculatrice ou sur ordinateur, déterminer au bout de combien de temps il pourra réaliser son achat.

10 SOMME DES CARRÉS DES PREMIERS ENTIERS NATURELS

★★ | 25 min | ▸ P. 56

Cet exercice ne pourra être traité qu'après avoir vu le chapitre 3 sur le 2nd degré.

On considère la suite (u_n) définie pour tout n entier strictement positif par :

$$u_n = \frac{6}{n}(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2).$$

On peut aussi écrire u_n à l'aide de la notation somme : $u_n = \frac{6}{n} \times \sum_{k=1}^{k=n} k^2$.

a. À l'aide d'un tableur ou d'une calculatrice, représenter graphiquement les 50 premiers termes de la suite (u_n).

Sur tableur, utiliser 4 colonnes, une pour n, une pour n^2, une pour la somme des carrés et une dernière pour u_n.

b. Émettre une conjecture sur le type de fonction f telle que, pour tout n entier entre 1 et 50, on ait $u_n = f(n)$.

c. Déterminer les coefficients a, b et c de la fonction du second degré $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Utiliser les valeurs u_1, u_2 et u_3 pour obtenir un système d'équations d'inconnues a, b, c.

d. Vérifier dans le tableur qu'on retrouve bien les valeurs de la suite (u_n).

e. À l'aide de la formule ainsi obtenue pour u_n, établir une formule simple donnant la somme des carrés des n premiers entiers strictement positifs.

11 LE FLOCON DE VON KOCH

★★★ | 40 min | ▸ P. 57

Le flocon de Koch a été inventé en 1904 par le mathématicien suédois Helge von Koch et c'est l'une des premières courbes fractales à avoir été décrites.

1. Soit un triangle équilatéral ABC de côté 10 cm. Son périmètre est $p_0 = 30$ cm. On place les points D et E sur le segment [AB] tels que AD = DE = EB et on construit un triangle équilatéral DEF à l'extérieur du triangle ABC (fig. 1).

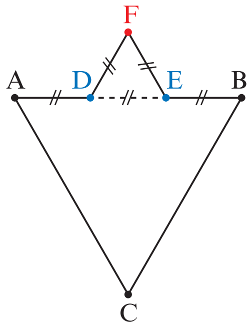


Fig. 1

a. On considère la ligne brisée ADFEB. Calculer sa longueur.
b. On effectue la même construction sur les segments [BC] et [AC] (fig.2).

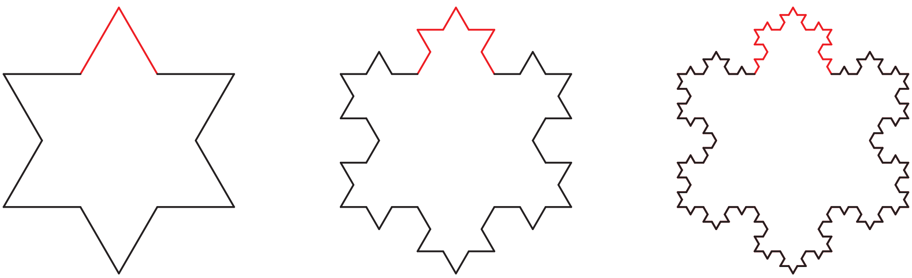


Fig. 2 **Fig. 3** **Fig. 4**

Calculer le périmètre p_1 de la figure obtenue.
2. On répète cette construction sur tous les segments (fig. 3).
Calculer le périmètre p_2 de la figure obtenue.
3. On réitère cette construction n fois et on appelle p_n le périmètre de la figure obtenue.
a. Quelle est la nature de la suite (p_n) ? Justifier.
b. Exprimer p_n en fonction de n.
c. Quel est le sens de variation de cette suite ?
d. Calculer p_{20}, p_{50} puis p_{100}.
On gardera 3 chiffres significatifs et on exprimera ces longueurs en km.
e. Que peut-on dire de p_n lorsque n devient très grand ?
4. Ce « flocon » tient dans le cercle circonscrit au triangle ABC.
Calculer l'aire de ce cercle et en déduire un majorant de l'aire du flocon.

On peut donc théoriquement obtenir ainsi une ligne aussi longue que l'on veut inscrite dans une aire finie. Cependant, si l'on veut réaliser ces flocons, on est limités au bout de quelques étapes par la précision de nos instruments et l'épaisseur des traits.

PRÉPARER UN CONTRÔLE

12 LES BASES

★★ | 25 min | ▶ P. 58

1. Restitution de connaissances

a. Démontrer que : $1+q+\ldots+q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$ avec n ∈ ℕ.

En appelant S_n la somme à calculer, calculer et simplifier $S_n - qS_n$.

b. En déduire la formule permettant de calculer la somme des $(n+1)$ premiers termes d'une suite géométrique.

2. La suite (u_n) est une suite géométrique avec $u_4 = 1$ et $q = \dfrac{1}{2}$.

a. Calculer u_0.

b. Donner l'expression de u_n en fonction de n.

c. Quel est son sens de variation ? Justifier.

d. Représenter graphiquement les 8 premiers termes de la suite.

e. Calculer la somme $S = u_0 + u_1 + \ldots + u_{20}$.

3. La suite (u_n) est définie par $u_n = 2n+5$.

a. Montrer que (u_n) est une suite arithmétique dont vous préciserez le premier terme et la raison.

b. Quel est son sens de variation ? Justifier.

4. Calculer $1+3+5+\cdots+2\ 019$. Justifier.

Voir la méthode 3.

13 COMPTE SUR LIVRET

★ | 10 min | ▶ P. 59

On place 5 000 € sur un livret à 2,5 % d'intérêts annuels.
On appelle $u_0 = 5\,000$ et u_n le montant sur le compte n années plus tard, $n \in \mathbb{N}$.

a. Calculer u_1, u_2 et u_3.

Attention, pour u_2, les intérêts sont calculés sur le montant u_1...

b. Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Préciser sa raison.

c. Exprimer u_n en fonction de n.

d. De quelle somme dispose-t-on au bout de 10 ans ?

e. Combien d'années faut-il attendre pour doubler son capital de départ ?

Utiliser la calculatrice pour obtenir un tableau des premiers termes de la suite.

14 SUITE ARITHMÉTICO-GÉOMÉTRIQUE

★★ | 25 min | ▸ P. 60

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 6$ et $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer u_1 et u_2.
La suite (u_n) est-elle arithmétique ? Est-elle géométrique ? Justifier.

2. Lorsqu'on calcule de nombreux termes u_n, on se rend compte qu'ils tendent vers une valeur limite : 3.
Rédiger un algorithme en langage naturel permettant de calculer les termes successifs de la suite (u_n) jusqu'à ce qu'ils atteignent une valeur inférieure à 3,01 et le rang n correspondant.

3. Soit (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 3$.

a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{2}{3}$ et calculer v_0.

> Exprimer v_{n+1} en fonction de u_{n+1} puis remplacer avec l'expression donnée dans l'énoncé. On veut aboutir à $v_{n+1} = q \times v_n$.

b. Exprimer alors v_n, puis u_n, en fonction de n.

ALLER PLUS LOIN

15 ÉVOLUTIONS SUCCESSIVES

★★★ | 25 min | ▸ P. 61

1. Le 1er janvier 2010, le prix d'un objet est P_0. Au bout de n années, le prix de cet objet est noté P_n. L'inflation est de 3 % par an à partir de 2010.

a. Exprimer le prix P_1 de cet objet au bout d'un an, P_2 après 2 ans, P_n après n années, en fonction de n et de P_0.

> Le prix au bout de n + 1années est calculé à partir du prix au bout de n années. Établir la relation entre P_n et P_{n+1}.

b. Après combien d'années le prix de l'objet aura-t-il été multiplié par 2 ?
Le temps nécessaire dépend-il du prix de départ P_0 ?

> On pourra utiliser le tableau de valeurs de $1{,}03^n$ obtenu avec la calculatrice.

2. Dans cette question, on suppose que l'inflation est de 3 % une année, −3 % la suivante (il y a déflation), le cycle se reproduisant par période de 2 ans (+3 % en 2010, −3 % en 2011, +3 % en 2012, −3 % en 2013, etc.).

a. Quel est le prix de l'objet en fonction de P_0 au bout de 2 ans ?
Au bout de 4 ans ?

b. On définit la suite (u_n) par $u_n = P_{2n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la nature de cette suite puis exprimer le prix P_{2n} au bout de $2n$ années.

c. Justifier que la suite (u_n) est décroissante.
En déduire que pour tout n : $P_{2n} < P_0$.

d. Aurait-on les mêmes résultats si les taux d'inflation et de désinflation étaient respectivement de $i\,\%$ et de $-i\,\%$ $(0 < i < 100)$?

16 SUITE

★★ | 35 min | ▸ P. 62

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = \dfrac{1}{16}$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On admet que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Dans le repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\,\vec{j})$, représenter graphiquement sur l'intervalle $[0\,;\,3]$, à l'échelle 5 cm pour une unité, la fonction $f(x) = \sqrt{x}$ et la fonction $g(x) = x$.

2. Placer u_0 sur l'axe des abscisses, puis son image u_1 par f sur l'axe des ordonnées. Lire graphiquement la valeur de u_1.

> L'antécédent de u_1 par g est u_1 sur l'axe des abscisses. L'utilisation de $\mathscr{C}_g$, la « première bissectrice », sert à rabattre la valeur u_1 sur l'axe des abscisses.

3. Déterminer graphiquement de la même manière la valeur de u_2, puis de u_3.

4. Poursuivre la construction autant que possible. Qu'observe-t-on ?

5. On décide alors de programmer l'algorithme en python suivant :

```
from math import*
u_0=eval(input("entrer la valeur du premier terme"))
L=[u_0]
for i in range (1,14):
    L.append(sqrt(L[-1]))
print(L)
```

> L'instruction L=[...] crée une liste ; L.append(...) ajoute des éléments à la fin de la liste ; L[-1] appelle le dernier élément de la liste.

a. Que fait ce programme ?

b. Programmer cet algorithme et le faire tourner pour les valeurs de u_0 suivantes : $\dfrac{1}{16}$; 0,8 ; 2 et 25.

Que peut-on conjecturer ?

6. On souhaite répondre à la question
« Les suites de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ sont-elles toujours convergentes ? ».
On considère ici la fonction $f(x) = x^2$.

a. Modifier l'algorithme avec cette fonction.

b. Choisir différentes valeurs de u_0 (on se limitera aux cas $u_0 \geqslant 0$).
Conclure sur l'éventuelle convergence de (u_n) selon les valeurs de u_0.

> Pour $u_0 > 1$, prendre des valeurs très proches de 1 car les résultats dépassent vite la capacité de calcul de l'ordinateur.

17 DES LAPINS AU NOMBRE D'OR

★★★ | 50 min | ▸ P. 63

On considère le problème posé par Leonardo Fibonacci au XIII^e siècle : « Un homme met un couple de lapins nouveau-nés dans un lieu isolé de tous les côtés par un mur. Combien de couples obtient-on en un an si chaque couple engendre tous les mois un nouveau couple à compter du troisième mois de son existence ? »
Pour répondre à cette question, posons A_n le nombre de couples adultes et I_n le nombre de couples immatures à la fin du n^e mois. Alors, à la fin du premier mois, $A_1 = 0$ et $I_1 = 1$.
À la fin du 2^e mois, le couple immature devient adulte, et à la fin du 3^e mois, le couple a engendré un couple de lapereaux.
Les relations de récurrence liant ces suites sont donc :

$$I_{n+1} = A_n \text{ et } A_{n+1} = A_n + I_n.$$

1. Sur tableur, calculer les 30 premiers termes de chaque suite.

> On pourra mettre les valeurs de n dans la colonne A, les valeurs de A_n dans la colonne B et les valeurs de I_n dans la colonne C.

En déduire, dans une 4^e colonne, le nombre total de couples de lapins à la fin du n^e mois. On notera cette suite (T_n).

2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $T_{n+2} = T_{n+1} + T_n$. Cette relation de récurrence définit la suite de Fibonacci pour $T_1 = 1$ et $T_2 = 1$.

3. Déduire de cette relation que $\dfrac{T_{n+2}}{T_{n+1}} \times \dfrac{T_{n+1}}{T_n} = \dfrac{T_{n+1}}{T_n} + 1$.

4. On s'intéresse maintenant à la suite définie par $u_n = \dfrac{T_{n+1}}{T_n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Dans une nouvelle colonne du tableur, calculer les 29 premiers termes de la suite (u_n), en faisant apparaître 8 décimales.
Quelle conjecture peut-on faire concernant cette suite ?

5. On admettra que la suite (u_n) tend vers une valeur limite notée φ et que φ est la solution positive d'une équation du second degré : $x^2 = x + 1$.
Si le chapitre « second degré » a déjà été étudié, montrer que la valeur exacte de φ est $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Le nombre φ est appelé nombre d'or.

6. a. À l'aide du tableur, déterminer à partir de quel rang n, $|u_n - \varphi| < 10^{-6}$.
b. Écrire un algorithme qui permet de déterminer ce rang n.

CORRIGÉS

1 CALCUL DE U_{50}

a. $u_1 = \sqrt{2\times 1^2 + 4\times 1 + 1} = \sqrt{7}$; $u_2 = \sqrt{2\times 2^2 + 4\times 2 + 1} = \sqrt{17}$.

$\boldsymbol{u_{50}} = \sqrt{2\times 50^2 + 4\times 50 + 1} = \boldsymbol{\sqrt{5\,201}}$.

b. $u_1 = 3 - \dfrac{2}{1} = \mathbf{1}$; $u_2 = 3 - \dfrac{2}{2} = \mathbf{2}$; $u_{50} = 3 - \dfrac{2}{50} = \mathbf{2{,}96}$.

c. $u_{n+1} - u_n = 3 \Leftrightarrow u_{n+1} = 3 + u_n$ donc :

$u_1 = u_{0+1} = 3 + u_0 = 3 + 7 = \mathbf{10}$; $u_2 = u_{1+1} = 3 + u_1 = 3 + 10 = \mathbf{13.}$

(u_n) est arithmétique de raison $r = 3$, et de premier terme $u_0 = 7$.

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + rn = 7 + 3n$ d'après le cours II.2.

Donc $u_{50} = 7 + 3\times 50 = \mathbf{157}$.

d. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = -2u_n$, donc (u_n) est géométrique de raison $q = -2$.

Son premier terme est $\boldsymbol{u_1} = \mathbf{-3.}$

$u_2 = u_{1+1} = -2\times u_1 = -2\times(-3) = \mathbf{6}$.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = u_1 \times q^{n-1}$ d'après le cours III.2., $u_n = -3\times(-2)^{n-1}$.

Pour $n = 50$, $u_{50} = -3\times(-2)^{49} = 3\times 2^{49} = \mathbf{1{,}69\times 10^{15}}$ à 10^{13} près.

2 SUITES ARITHMÉTIQUES

Si on note u_0 le premier terme et r la raison de la suite arithmétique (u_n) :

$$u_n = u_0 + r\times n.$$

a. $\begin{cases} u_4 = 12 = u_0 + 4r \\ u_9 = -8 = u_0 + 9r \end{cases}$

Par soustraction membre à membre :

$$-8 - 12 = 9r - 4r \Leftrightarrow -20 = 5r \Leftrightarrow r = -4.$$

Autre méthode : On peut utiliser directement la formule du cours II.2. :

$$u_9 = u_4 + (9-4)r \Leftrightarrow -8 = 12 + 5r \Leftrightarrow 5r = -20 \Leftrightarrow r = -4.$$

D'où $u_4 = 12 = u_0 + 4\times(-4) = u_0 - 16 \Leftrightarrow u_0 = 28$.

(u_n) est la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 28$ **et de raison** $r = -4$.

D'où $u_{20} = 28 - 4\times 20 = \mathbf{-52}$.

Voir la méthode 2.

b. $\begin{cases} u_{27} = 7 = u_0 + 27r \\ u_{10} = \dfrac{15}{7} = u_0 + 10r \end{cases}$

Par soustraction membre à membre :

$$7 - \frac{15}{7} = 17r \Leftrightarrow \frac{34}{7} = 17r \Leftrightarrow \frac{34}{7}\times\frac{1}{17} = r \Leftrightarrow \frac{2}{7} = r.$$

Une autre méthode consiste à utiliser la relation : $u_{27} = u_{10} + 17r$.

On en déduit : $\dfrac{15}{7} = u_0 + 10 \times \dfrac{2}{7} = u_0 + \dfrac{20}{7}$, d'où $u_0 = \dfrac{-5}{7}$.

$\boldsymbol{(u_n)}$ **est la suite arithmétique de premier terme** $\boldsymbol{u_0 = -\dfrac{5}{7}}$ **et de raison** $\boldsymbol{r = \dfrac{2}{7}}$.

D'où $u_{20} = -\dfrac{5}{7} + \dfrac{2}{7} \times 20 = -\dfrac{5}{7} + \dfrac{40}{7} = \dfrac{35}{7} = \mathbf{5}$.

3 SUITES GÉOMÉTRIQUES

a. $u_2 = u_1 \times q$ donc $u_2 = 5 \times (-3) = \mathbf{-15}$.

Pour $n \geqslant 1$: $u_n = u_1 \times q^{n-1}$ donc :

$$u_{15} = 5 \times (-3)^{15-1} = 5 \times (-3)^{14} = \mathbf{23\,914\,845}.$$

La suite a pour premier terme u_1, d'où la puissance $(n-1)$.

b. $u_n = u_0 \times q^n$, donc $u_5 = -20 = u_0 \times q^5$,

et $u_9 = -80 = u_0 \times q^9 = u_0 \times q^5 \times q^4 = -20q^4$.

On peut aussi écrire directement $u_9 = u_5 \times q^4$ d'après le cours **III.2**.

$$-80 = -20 \times q^4 \Leftrightarrow q^4 = \frac{-80}{-20} = 4$$
$$\Leftrightarrow q^2 = \sqrt{4} = 2$$
$$\Leftrightarrow \boldsymbol{q = \sqrt{2}} \textbf{ ou } \boldsymbol{q = -\sqrt{2}}.$$

q^2 ne peut pas être égal à -2.

- Si $q = \sqrt{2}$,

$$-20 = u_0 \times (\sqrt{2})^5 = 4\sqrt{2}u_0 \Leftrightarrow u_0 = \frac{-20}{4\sqrt{2}} = \frac{-5}{\sqrt{2}} = \frac{-5\sqrt{2}}{2}.$$

Donc $u_{24} = u_0 \times \left(\sqrt{2}\right)^{24} = u_0 \times 2^{12}$,

donc $u_{24} = -\dfrac{5\sqrt{2}}{2} \times 2^{12} = -5\sqrt{2} \times 2^{11} = \mathbf{-10\,240\sqrt{2}}$.

- Si $q = -\sqrt{2}$,

$$-20 = u_0 \times \left(-\sqrt{2}\right)^5 = -4\sqrt{2}u_0 \Leftrightarrow u_0 = \frac{-20}{-4\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

Donc $u_{24} = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}\left(-\sqrt{2}\right)^{24} = \dfrac{5\sqrt{2}}{2} \times 2^{12} = \mathbf{10\,240\sqrt{2}}$.

c. $u_n = u_p \times q^{n-p} \Leftrightarrow u_8 = u_5 \times q^3$

$$\Leftrightarrow 27 = 8 \times q^3$$
$$\Leftrightarrow q^3 = \frac{27}{8} = \frac{3^3}{2^3} = \left(\frac{3}{2}\right)^3 \Leftrightarrow q = \frac{3}{2}.$$

Alors : $u_{15} = u_8 \times q^{15-8} = 27 \times \left(\dfrac{3}{2}\right)^7 = 27 \times \dfrac{3^7}{2^7} = \mathbf{\dfrac{59\,049}{128}}$.

4 MONOTONIE

a. $u_n = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1 = 1 + 2n.$
(u_n) est une suite arithmétique de premier terme 1 et de raison $r = 2$ car elle est du type $u_0 + rn.$
$2 > 0$, donc (u_n) **est strictement croissante.**

b. $u_n = -5 \times (-2)^n$ est du type $u_n = u_0 \times q^n$ donc (u_n) est une suite géométrique de raison $q = -2$; comme $q < 0$, alors (u_n) **n'est ni croissante, ni décroissante**.

c. $u_n = \dfrac{5}{3^n} = 5 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$, donc (u_n) est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{3}$ et de premier terme $u_0 = 5$.
On a $0 < q < 1$ et $u_0 > 0$, donc (u_n) **est strictement décroissante.**

d. $u_{n+1} - u_n = \dfrac{7}{2} \Leftrightarrow u_{n+1} = u_n - \dfrac{7}{2} = u_n + r$ avec $r = \dfrac{7}{2}$. (u_n) est une suite arithmétique de raison $r > 0$, donc (u_n) **est strictement croissante.**

5 SOMMONS

1. a. Écrivons cette somme deux fois, l'une en-dessous de l'autre, et écrivons la seconde à rebours. Ensuite, nous additionnons ces 2 lignes :

$$\begin{array}{l} 1 + \quad 2 \quad + \ldots + (n-1) + n \\ n + (n-1) + \ldots + \quad 2 \quad + 1 \\ \hline (n+1) + (n+1) + \ldots + (n+1) + (n+1) \end{array}$$

Le total est n fois $(n+1)$ donc nous avons :
$2 \times (1 + 2 + \ldots + n) = n(n+1)$ soit : $1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

b. Les n premiers termes vont de u_0 à u_n, donc on cherche à calculer :

$$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = u_0 + (u_0 + 1 \times r) + \ldots + (u_0 + nr).$$
$$S_n = (n+1) \times u_0 + r \times (1 + 2 + \ldots + n)$$

Donc d'après le **a.** : $S_n = (n+1) \times u_0 + \dfrac{rn(n+1)}{2}$.

$S_n = (n+1)\left[u_0 + \dfrac{rn}{2}\right] = (n+1) \times \dfrac{2u_0 + rn}{2}$.

Et donc $\boldsymbol{S_n = (n+1)\,\dfrac{u_0 + u_n}{2}}$.

2. a. Première méthode
On peut voir S_1 comme la somme des $100 - 19 + 1 = 82$ premiers termes d'une suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_0 = 19$ et de raison $r = 1$.
Avec la formule démontrée au **1. b.** on trouve :

$$S_1 = 82 \times \frac{19 + 100}{2} = 41 \times 119 = \mathbf{4\,879}.$$

Deuxième méthode
$S_1 = 1 + 2 + \ldots + 100 - (1 + 2 + \ldots + 18)$.
On utilise alors le **1. a.** :

$$S_1 = \frac{100 \times (100+1)}{2} - \frac{18 \times (18+1)}{2}$$
$$= 50 \times 101 - 9 \times 19 = \mathbf{4\,879}.$$

b.

Il faut d'abord identifier la nature de la suite dont on ajoute les termes.

L'écart entre 6 et -42 n'est pas le même qu'entre -42 et 294.
Ce n'est pas une suite arithmétique.
Cherchons si ce sont les termes d'une suite géométrique :
$6\times(-7)=-42$; $-42\times(-7)=294$.
Cela semble correspondre à une suite géométrique de raison -7 et de premier terme $u_0=6$. Voyons si 34 588 806 est bien un terme de cette suite.
Sur la calculatrice, on entre la formule $Y=6\times(-7)\hat{}\,X$ pour obtenir le tableau de valeurs des termes de cette suite. On trouve $u_8=34\,588\,806$.

Pensez à remplacer *n* par *X* dans la formule sur calculatrice.
Réglez ensuite la tableau de valeurs en prenant $X_{min}=0$ et un pas de 1.

Alors S_2 est la somme des 9 premiers termes de cette suite géométrique :

$$S_2=u_0\times\frac{1-q^9}{1-q}=6\times\frac{1-(-7)^9}{1+7}=\mathbf{30\,265\,206}.$$

c. -3, 1, 5 sont les trois premiers termes d'une suite arithmétique telle que $u_0=-3$ et $r=4$. Alors :

$$u_n=u_0+rn\Leftrightarrow 57=-3+4n\Leftrightarrow 60=4n\Leftrightarrow n=15.$$

$$S_3=u_0+u_1+\cdots+u_{15}=(15+1)\times\frac{u_0+u_{15}}{2}=16\times\frac{-3+57}{2}=16\times 27=\mathbf{432}.$$

6 RADIOACTIVITÉ

Partie A. 1. u_{n+1} représente la quantité de tritium présente au bout de $(n+1)\times 12{,}32=n\times 12{,}32+12{,}32$ ans, c'est-à-dire la moitié de la quantité présente au bout de $n\times 12{,}32$ ans, donc $\boldsymbol{u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n}$.

2. On en déduit que (u_n) **est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $u_0=33$.**

3. Alors $u_n=u_0\times q^n$, donc $\boldsymbol{u_n=33\times\left(\frac{1}{2}\right)^n}$.

4. En dressant le tableau de valeurs sur la calculatrice, on voit que :

$$u_5\approx 1{,}03>1 \text{ et } u_6\approx 0{,}52<1.$$

Donc, au bout de $6\times 12{,}32$ ans, il reste moins de 1 g de tritium, **soit au bout de 73,9 ans**.

Partie B. 1. $v_{n+1}=v_n-v_n\times\frac{5{,}5}{100}=v_n\left(1-\frac{5{,}5}{100}\right)$.

$v_{n+1}=0{,}945v_n$, donc (v_n) **est une suite géométrique de raison 0,945 et de premier terme $v_0=33$.**

2.

```
from math import*
n = int(input("Entrer l'année choisie :")
v_n = 33*0.945**(n-2002)
print("Il restera ", v_n, "g de tritium en", n)
```

3. Fin 2003, les rejets de 2002 se sont désintégrés en partie, donc il reste : $v_1 = 33 \times 0{,}945 \approx 31{,}19$ g de 2002, auxquels on ajoute les 33 g libérés en 2003, ce qui représente **64,19 g**.

4. Fin 2004, la quantité de tritium présente sur les rejets de 2002 est $v_2 = 33 \times 0{,}945^2 \approx 29{,}47$, et sur les rejets de 2003, c'est v_1 donc :

$$v_0 + v_1 + v_2 \approx \mathbf{93{,}66\ g.}$$

5. Fin 2064, la quantité de tritium présente serait :

$$v_0 + v_1 + \ldots + v_{62} = v_0 \times \frac{1-q^{63}}{1-q} (\text{car } q \neq 1) = 33 \times \frac{1-0{,}945^{63}}{1-0{,}945} \approx 583.$$

Il resterait 583 g **de tritium**.

7 EMPRUNT

a. La première mensualité est $u_1 = 500 + \frac{6}{100} \times 15\ 000 = \mathbf{1\ 400\ €}$.

Ensuite, il reste $15\ 000 - 500 = 14\ 500$ € de capital à rembourser.

La 2^e^ mensualité est donc : $u_2 = 500 + \frac{6}{100} \times 14\ 500 = \mathbf{1\ 370\ €}$.

Il reste $14\ 500 - 500 = 14\ 000$ € de capital à rembourser.

La 3^e^ mensualité est $u_3 = 500 + \frac{6}{100} \times 14\ 000 = \mathbf{1\ 340\ €}$.

b.

```
from math import*
n = int(input("Entrer le nombre de mois écoulés :")
S = 0
C = 15000
for i in range(n):
    u = 500 + 6/100*C
    S = S + u
    C = C – 500
Print ("La somme totale versée est :", S, "euros")
```

La boucle *for* peut aussi s'écrire « for i in range (0,n) » mais attention, il faut savoir que cette instruction n'effectue que *n* boucles et pas *n*+1 (alors qu'il y a *n*+1 valeurs de 0 à n). Cette instruction permet d'accepter *n* = 0.

c. La suite semble arithmétique de raison -30 car, d'un terme au suivant, on soustrait 30 €. Calculons $u_{n+1} - u_n$ pour le prouver, C étant le capital restant avant la n^e mensualité :

$$u_n = 500 + \frac{6}{100} \times C \text{ et } u_{n+1} = 500 + \frac{6}{100} \times (C - 500) \text{ donc :}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{6}{100} \times (C - 500) - \frac{6}{100} \times C = \frac{6}{100} \times (-500) = -30.$$

$u_{n+1} - u_n$ est constant, donc (u_n) **est une suite arithmétique de raison -30 et de premier terme $u_1 = 1\ 400$**.

d. On a donc :

$$u_n = u_1 + r \times (n-1) = \mathbf{1\,400 - 30 \times (n-1)}.$$

Il faut être vigilant sur l'indice du premier terme de la suite lorsqu'on donne la formule générale.

À raison de 500 € par mois, le capital de $15\,000$ € est remboursé en :

$$N = \frac{15\,000}{500} = \mathbf{30 \text{ mois.}}$$

Attention, le capital est remboursé avant que u_n ne soit égal à 0 !

La dernière mensualité est donc :

$$u_{30} = 1\,400 - 30 \times (30-1) = \mathbf{530\ €}.$$

e. La somme totale remboursée est la somme des premiers termes d'une suite arithmétique :

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_N = \frac{N \times (u_1 + u_N)}{2} = \frac{30 \times (1\,400 + 530)}{2} = 28\,950\ €.$$

Voir le cours II.4.

Donc le coût de l'emprunt est $28\,950 - 15\,000 = \mathbf{13\,950\ €}$.

8 INCONNUE

Si on note r la raison de la suite arithmétique, les quatre termes consécutifs de la suite peuvent être appelés u_0, $u_1 = u_0 + r$, $u_2 = u_0 + 2r$ et $u_3 = u_0 + 3r$.

D'où : $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 4u_0 + 6r = -2 \Leftrightarrow 2u_0 + 3r = -1 \quad \mathbf{(1)}$

$$\begin{aligned} u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 &= u_0^2 + (u_0^2 + 2u_0 r + r^2) + (u_0^2 + 4u_0 r + 4r^2) + (u_0^2 + 6u_0 r + 9r^2) \\ &= 4u_0^2 + 12u_0 r + 14r^2 = 46 \quad \mathbf{(2)}. \end{aligned}$$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Pour simplifier la relation **(2)**, on élève au carré les membres de la relation **(1)**, alors :

$$4u_0^2 + 12u_0 r + 9r^2 = 1.$$

Par soustraction membre à membre, on obtient :

$$\begin{aligned} 14r^2 - 9r^2 = 45 &\Leftrightarrow 5r^2 = 45 \\ &\Leftrightarrow r^2 = 9 \\ &\Leftrightarrow r = 3 \text{ ou } -3. \end{aligned}$$

Si $r = 3$:

(1) $\Leftrightarrow 2u_0 + 9 = -1 \Leftrightarrow 2u_0 = -10 \Leftrightarrow \boldsymbol{u_0 = -5}$, les termes suivants de cette suite étant alors $\boldsymbol{u_1 = -2}$, $\boldsymbol{u_2 = 1}$, $\boldsymbol{u_3 = 4}$.

Si $r = -3$:

(1) $\Leftrightarrow 2u_0 - 9 = -1 \Leftrightarrow 2u_0 = 8 \Leftrightarrow \boldsymbol{u_0 = 4}$, $\boldsymbol{u_1 = 1}$, $\boldsymbol{u_2 = -2}$, $\boldsymbol{u_3 = -5}$.

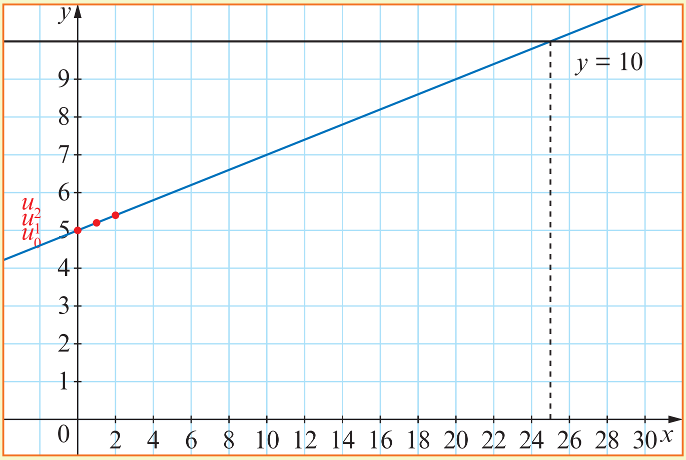
9 ÉCONOMISONS

1. Une suite est arithmétique lorsque ses termes s'obtiennent en ajoutant toujours la même valeur d'un terme à l'autre. Ici, on ajoute 20 cents d'une semaine à la suivante, donc cela correspond à **une suite arithmétique de raison 0,20 et de premier terme $u_0 = 5$.**

2. On en déduit que $u_n = 5 + 0{,}2n$, d'où $\boldsymbol{u_{20} = 5 + 0{,}2 \times 20 = 9}$ **euros**.

3. Il s'agit de représenter la fonction u définie par $u(n) = 0{,}2n + 5$ qui est l'ensemble des points d'abscisse n entière d'une fonction affine.

Voir le cours II.3.



4. a. Voir ci-dessus : on trouve $\boldsymbol{n = 25}$**, donc à la 26ᵉ semaine**.

b.

$u \leftarrow 0$
$n \leftarrow 0$
Saisir S
tant que ***u* < S** faire
    $n \leftarrow n+1$
    $u \leftarrow u+0{,}2$

c. On cherche n tel que $u_n \geqslant 10$.

$$u_n \geqslant 10 \Leftrightarrow 5 + 0{,}2n \geqslant 10 \Leftrightarrow 0{,}2n \geqslant 5$$
$$\Leftrightarrow n \geqslant \frac{5}{0{,}2} \text{ car } 0{,}2 > 0 \Leftrightarrow n \geqslant 25.$$

Donc, à partir de la 26ᵉ semaine, il touchera plus de 10 € .

Attention aux indices ! Ici, u_0 est la somme reçue la première semaine, donc u_1, la 2ᵉ semaine … u_{25}, la 26ᵉ semaine.

5. a. On veut déterminer n tel que $S_n \geqslant 150$ où S_n désigne la somme $u_0 + u_1 + \ldots + u_n$ des $n+1$ premiers termes de la suite arithmétique.

Alors $S_n = \dfrac{(n+1)(u_0+u_n)}{2}$ d'après le cours, II.4.

$$\begin{aligned} S_n \geqslant 150 &\Leftrightarrow \frac{(n+1)(u_0+u_n)}{2} \geqslant 150 \\ &\Leftrightarrow (n+1)(5+(5+0,2n)) \geqslant 300 \text{ car } 2>0 \\ &\Leftrightarrow (n+1)(10+0,2n) \geqslant 300 \\ &\Leftrightarrow \mathbf{0,2n^2 + 10,2n + 10 \geqslant 300}. \end{aligned}$$

b. Voici deux algorithmes possibles. Le premier utilise la formule calculée ci-dessus. Le second fait la somme terme par terme comme à l'exercice 6.

```
from math import*
def f(n):
    return 0.2*n**2+10.2*n+10
n = 0
while f(n) < 300:
    n=n+1
print ("Il faudra attendre", n, "semaines")
```

```
from math import*
S = 0
while S < 150:
    u=5+0.2*n
    S = S + u
    n=n+1
print ("Il faudra attendre", n, "semaines")
```

n ne doit être incrémenté (augmenté de 1) qu'après avoir calculé u_n.

La réponse obtenue est n = 21, donc à partir de la 22^e^ semaine.

Voici la résolution algébrique de cette inéquation du second degré après avoir étudié le chapitre 3 :

$$0,2n^2 + 10,2n + 10 \geqslant 300 \Leftrightarrow 0,2n^2 + 10,2n - 290 \geqslant 0.$$

Pour une telle inéquation, déterminer le signe du polynôme $0,2x^2 + 10,2x - 290$.

$\Delta = 10,2^2 - 4 \times 0,2 \times (-290) = 336,04 > 0$, donc ce polynôme a deux racines :

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-10,2-\sqrt{336,04}}{2\times 0,2} \approx -71,3$ à 10^{-1} près ;

$x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-10,2+\sqrt{336,04}}{2\times 0,2} \approx 20,3$ à 10^{-1} près.

Comme $a > 0$, on en déduit :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$-\infty$
$0,2x^2 + 10,2x - 290$		+	0	−	0	+	

Comme $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 0$, donc $S_n \geqslant 150 \Leftrightarrow n \geqslant x_2$. Il ne perçoit son argent de poche qu'une fois par semaine, donc la réponse est un nombre entier : 20,3 semaines n'aurait pas de sens. Donc à partir de $n = 21$, il aura assez d'argent, **c'est-à-dire à partir de la 22^e^ semaine.**

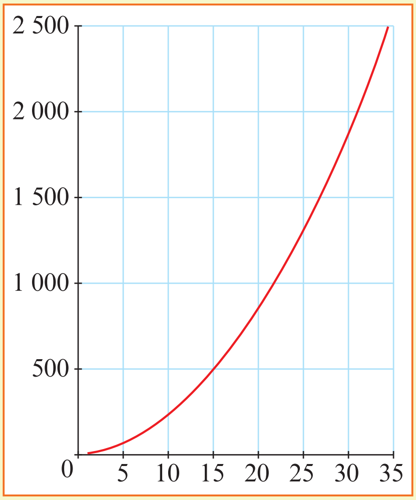
10 SOMME DES CARRÉS DES PREMIERS ENTIERS NATURELS

a. Sur tableur.
– Pour u_1 : dans la cellule A2, mettre la valeur 1.
Dans la cellule B2, écrire la formule : = A2^2 .
Dans la cellule C2, écrire la formule : = B2 .
Dans la cellule D2, écrire la formule : = 6 / A2*C2.
– Pour u_2 : dans la cellule A3, écrire la formule : = A2 + 1 .
Dans la cellule B3, écrire la formule : = A3^2 (ou copier-coller B2).
Dans la cellule C3, écrire la formule : = SOMME (B2 : B3) (ou = C2 + B3).
Dans la cellule D3, écrire la formule : = 6 / A3*C3
(ou copier-coller D2).
On étend ensuite la ligne 3 jusqu'à la ligne 51.

	A	B	C	D
1	n	n^2	Somme des n^2	u_n
2	1	1	1	6
3	2	4	5	15
4	3	9	14	28
5	4	16	30	45

Sur tableur, le $ placé **avant** la référence d'une case permet de bloquer cette référence lorsqu'on recopie une formule : ici, on veut que la somme commence toujours à la valeur 1 placée en B2 quand on descend. On aurait pu noter seulement B$2 car le B ne varie pas de toute façon à la recopie vers le bas.

Puis avec l'assistant graphique, on obtient en choisissant le type « diagramme XY » (valeurs X de A2 à A51 et Y de D2 à D51) :



b. Cette courbe ressemble à une portion de parabole, donc on peut conjecturer que f est une **fonction polynomiale du second degré.**

c. Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$. On sait que $u_1 = f(1) = 6$; $u_2 = f(2) = 15$ et $u_3 = f(3) = 28$, donc on doit résoudre un système de trois équations à trois inconnues :

$$\begin{cases} a+b+c=6 \\ 4a+2b+c=15 \\ 9a+3b+c=28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=6 & \\ 3a+b=9 & (L_2-L_1) \\ 5a+b=13 & (L_3-L_2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=6 & \\ 3a+b=9 & \\ 2a=4 & (L_3-L_2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ 6+b=9 \\ 2+b+c=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=3 \\ c=1 \end{cases}$$

On a donc : $\boldsymbol{f(x) = 2x^2 + 3x + 1}$.

d. Sur le tableur, dans la case E2, on entre la formule : $=2*A2\text{^}2+3*A2+1$, puis on recopie vers le bas et on compare avec la colonne D et le graphique : on a bien retrouvé u_n.

e. $u_n = 2n^2 + 3n + 1 \Leftrightarrow \dfrac{6}{n}(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) = 2n^2 + 3n + 1$

$$\Leftrightarrow 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n}{6} \times \left(2n^2 + 3n + 1\right)$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}}.$$

11 LE FLOCON DE VON KOCH

1. a. AB = 10 cm et [AB] a été divisé en 3 morceaux égaux donc

AD = DF = FE = EB = $\dfrac{10}{3}$ cm et ADFEB mesure $4 \times \dfrac{10}{3} = \dfrac{40}{3} \approx$ **13,3 cm**.

b. L'étoile obtenue à la fin de cette première étape a donc pour périmètre :

$$\boldsymbol{p_1 = 3 \times \frac{40}{3} = 40 \text{ cm}}.$$

2. Pour le segment [AD] : il est divisé en 3 parties de $\dfrac{10}{3} \div 3 = \dfrac{10}{9}$ cm.

On en conserve 2, et on ajoute 2 segments supplémentaires de la même longueur. Au total, le segment [AD] est remplacé par une ligne brisée de longueur :

$\dfrac{4}{3} \times \dfrac{10}{3} = \dfrac{40}{9}$ cm.

La figure 3 est composée de 12 lignes brisées comme celles-ci, donc la longueur totale est : $\boldsymbol{p_2 = 12 \times \frac{40}{9} = \frac{160}{3} \approx 53{,}3}$ **cm**.

3. a. À chaque étape, chaque segment est divisé en 3, puis on trace une ligne brisée en lui ajoutant 2 segments, donc chaque segment est remplacé par une ligne brisée dont la longueur est $\dfrac{4}{3}$ fois plus grande. Au total, le périmètre du flocon est donc multiplié par $\dfrac{4}{3}$: $p_{n+1} = \dfrac{4}{3} \times p_n$.

(p_n) est donc une suite géométrique de raison $\boldsymbol{\frac{4}{3}}$.

b. $\boldsymbol{p_n = p_0 \times q^n = 30 \times \left(\frac{4}{3}\right)^n}$.

c. $\frac{4}{3} > 1$ donc la suite $\left(\frac{4}{3}\right)^n$ est strictement croissante.
De plus, $p_0 > 0$ donc **la suite (p_n) est strictement croissante.**

d. $p_{20} = 30 \times \left(\frac{4}{3}\right)^{20} \approx 9\,460$ cm ,soit **0,095 km**.

$p_{50} = 30 \times \left(\frac{4}{3}\right)^{50} \approx 5{,}30 \times 10^7$ cm, soit **530 km**.

$p_{100} = 30 \times \left(\frac{4}{3}\right)^{100} \approx 9{,}35 \times 10^{13}$ cm, soit **935 millions de km**.

e. **p_n semble augmenter à l'infini lorsque n devient très grand**.

4. On considère la hauteur du triangle ABC issue de A. Elle coupe [BC] en H tel que H est le milieu de [BC] puisque ABC est équilatéral.
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle ABH rectangle en H :

$$AB^2 = AH^2 + HB^2 \Leftrightarrow AH^2 = 10^2 - 5^2 = 75 \Leftrightarrow AH = \sqrt{75}$$

De plus, dans un triangle équilatéral, la hauteur est confondue avec les médianes et les médiatrices, donc le centre du cercle circonscrit est le centre de gravité et il est aux $\frac{2}{3}$ du segment [AH].

Donc le rayon du cercle cherché est : $R = \frac{2}{3} \times \sqrt{75} = \frac{10\sqrt{3}}{3} \approx 5{,}77$ cm.

L'aire du cercle est donc : $\pi R^2 = \pi \times \left(\frac{10\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \pi \times \frac{100}{3} \approx$ **105 cm²**.

Le flocon étant à l'intérieur de ce cercle, il a une aire inférieure à 105 cm².

12 LES BASES

1. a. Posons $S_n = 1 + q + \ldots + q^n$. Alors :

$$q \times S_n = q \times 1 + q \times q + \ldots + q^n \times q = q + q^2 + \ldots + q^{n+1}.$$

Soustrayons membre à membre ces deux égalités, les termes $q, q^2, \ldots, q^n$ s'éliminent, il reste $S_n - qS_n = 1 - q^{n+1}$.
Soit : $(1-q)S_n = 1 - q^{n+1}$.

b. Si le premier terme est u_0, on a :

$$\begin{aligned} u_0 + u_1 + \ldots + u_n &= u_0 + u_0 \times q + \ldots + u_0 \times q^n \\ &= u_0 \times (1 + q + \ldots + q^n) = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}. \end{aligned}$$

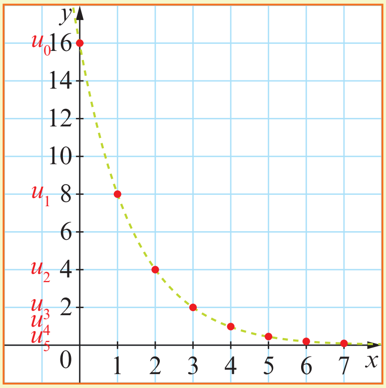
2. a. D'après la formule du cours : $u_4 = u_0 \times q^4$, donc :

$$1 = u_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 \Leftrightarrow u_0 = 1 \times 2^4 \Leftrightarrow \boldsymbol{u_0 = 16}.$$

b. $\boldsymbol{u_n = u_0 \times q^n = 16 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n}$.

c. $u_0 > 0$ et $0 < q < 1$, donc **la suite (u_n) est strictement décroissante**.

d.



e. $S = u_0 + u_1 + ... + u_{20}$ donc d'après la question **1.** :

$$S = 16 \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{21}}{1-\frac{1}{2}} = 16 \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{21}}{\frac{1}{2}} = 32 \times \left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{21}\right).$$

$\boldsymbol{S = \frac{2\,097\,151}{65\,536}}$.

3. a. $u_n = 2n + 5$, donc $u_{n+1} = 2(n+1)+5 = 2n+7$.
D'où : $u_{n+1} - u_n = (2n+7)-(2n+5) = 2 \Leftrightarrow u_{n+1} = u_n + 2$.
(u_n) est bien une suite arithmétique de raison $r = 2$ et de premier terme $u_0 = 2 \times 0 + 5 = 5$.

b. $r > 0$ donc la suite (u_n) est strictement croissante.

4. 1, 3, 5 sont les premiers termes d'une suite arithmétique (u_n) de raison $r = 2$ et de premier terme $u_0 = 1$.
Il faut trouver le rang N du nombre 2 019.
Or $u_N = 2\,019 = u_0 + r \times N \Leftrightarrow 2\,019 = 1 + 2N \Leftrightarrow 2\,018 = 2N \Leftrightarrow 1\,009 = N$.

$$1+3+5+\ldots+2019 = \frac{(N+1)(u_0+u_N)}{2} = 1\,010 \times \frac{1+2\,019}{2}$$

$1+3+5+\ldots+2\,019 = 1\,020\,100.$

Voir le cours II.2. et 4. en cas de difficultés.

13 COMPTE SUR LIVRET

a. $\boldsymbol{u_1} = 5\,000 + 5\,000 \times \frac{2{,}5}{100} = \mathbf{5\,125}$ **€.**

$u_2 = 5\,125 + 5\,125 \times \frac{2{,}5}{100} \approx$ **5 253,13 € à 10^{-2} près.**

$u_3 = 5\,253{,}13 + 5\,253{,}13 \times \frac{2{,}5}{100} \approx$ **5 384,46 € à 10^{-2} près.**

b. $u_{n+1} = u_n + u_n \times \frac{2{,}5}{100} = u_n \times (1+0{,}025) = u_n \times 1{,}025$.

(u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 5\,000$ et de raison $q = 1{,}025$.

CORRIGÉS

c. On en déduit que :

$$\boldsymbol{u_n = u_0 \times q^n = 5\,000 \times 1{,}025^n}.$$

Voir le cours III.2. et 4. en cas de difficultés.

d. $u_{10} = 5\,000 \times 1{,}025^{10} \approx 6\,400{,}42$.
On dispose de $6\,400{,}42$ € au bout de 10 ans.

e. On veut atteindre $10\,000$ €.
À l'aide de la fonction TABLE de la calculatrice, on constate que $u_{28} \approx 9\,982{,}48$ € et $u_{29} \approx 10\,232{,}04$ €, **donc il faut attendre 29 ans pour doubler le capital initial.**

Le tableau de valeurs s'obtient par la formule $Y = 5000 * 1{,}25$^X, où X démarre à 0 avec un pas de 1.

14 SUITE ARITHMÉTICO-GÉOMÉTRIQUE

1. $\boldsymbol{u_1} = \frac{2}{3}u_0 + 1 = \frac{2}{3} \times 6 + 1 = 5$.

$u_2 = \frac{2}{3}u_1 + 1 = \frac{2}{3} \times 5 + 1 = \frac{13}{3}$.

$u_1 - u_0 = 1 \neq u_2 - u_1$, donc **$(u_n)$ n'est pas arithmétique.**

$\frac{u_1}{u_0} = \frac{5}{6}$ et $\frac{u_2}{u_1} = \frac{\frac{13}{3}}{5} = \frac{13}{15} \neq \frac{5}{6}$, **donc (u_n) n'est pas géométrique.**

2. Il s'agit d'une boucle tant que :

```
u ← 6
n ← 0
Tant que u > 3,01 faire :
    u ← 2/3*u+1
    n ← n+1
```

En rédigeant ce programme sur calculatrice ou en utilisant le mode « suites récurrentes » de la calculatrice, on obtient : $u_n \leqslant 3{,}01$ à partir du rang 15, et $u_{15} \approx 3{,}007$.

Voir les exercices 8 ou 16 pour des algorithmes en python permettant de déterminer le rang auquel un seuil fixé est atteint.

3. a. $v_n = u_n - 3$, donc $v_{n+1} = u_{n+1} - 3$ avec $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 1$.

$$v_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 1 - 3 = \frac{2}{3}u_n - 2 = \frac{2}{3}u_n - \frac{2}{3} \times 3 = \frac{2}{3}(u_n - 3) = \frac{2}{3}v_n,$$

donc v_n est géométrique de raison $q = \frac{2}{3}$ et $v_0 = u_0 - 3 = 6 - 3 = 3$.

b. Alors $v_n = v_0 \times q^n$ soit $v_n = 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$,

donc $u_n - 3 = 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$, soit $\boldsymbol{u_n = 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n + 3}$.

15 ÉVOLUTIONS SUCCESSIVES

1. a. $\boldsymbol{P_1 = P_0 + P_0 \times \frac{3}{100} = P_0\left(1+\frac{3}{100}\right) = 1{,}03P_0}$.

$P_2 = P_1 + P_1 \times \frac{3}{100} = 1{,}03P_1\left(= 1{,}03^2 P_0\right)$.

$P_{n+1} = P_n + P_n \times \frac{3}{100} = 1{,}03P_n$.

Rappel de seconde : 1,03 est le coefficient multiplicateur correspondant à une augmentation de 3 %.

Donc (P_n) est une suite géométrique de premier terme P_0 et de raison 1,03, donc $\boldsymbol{P_n = 1{,}03^n \times P_0}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b. On cherche le plus petit entier n tel que $P_n \geqslant 2P_0$:

$$P_n \geqslant 2P_0 \Leftrightarrow 1{,}03^n \times P_0 \geqslant 2P_0 \Leftrightarrow 1{,}03^n \geqslant 2 \text{ car } P_0 > 0.$$

Sur la calculatrice, on entre la formule $Y = 1{,}03\char`^X$ dans le tableau de valeurs.
On obtient $1{,}03^{23} \approx 1{,}97 < 2$ et $1{,}03^{24} \approx 2{,}03 > 2$,
donc **le prix initial est doublé au bout de 24 ans**.

Le temps nécessaire ne dépend pas de $\boldsymbol{P_0}$, car la résolution amène à $\boldsymbol{1{,}03^n \geqslant 2}$ où $\boldsymbol{P_0}$ n'apparaît pas.

2. a. Augmenter P_0 de 3 % revient à multiplier par 1,03.

Diminuer le prix $P_1 = 1{,}03 \times P_0$ de 3 % revient à le multiplier par $1 - \frac{3}{100} = \boldsymbol{0{,}97}$.

Ainsi $P_2 = 0{,}97 \times P_1 = 0{,}97 \times 1{,}03 \times P_0$
$= \boldsymbol{0{,}9991P_0}$

Au bout de 4 ans, $P_4 = 0{,}97 \times \left(1{,}03 \times P_2\right)$
$= \boldsymbol{0{,}9991P_2}$

b. On a donc :

$$u_1 = P_{2\times1} = 0{,}9991P_0 = 0{,}9991u_0 \quad \text{et} \quad u_2 = P_{2\times2} = 0{,}9991P_2 = 0{,}9991u_1.$$

De même :

$$P_{2n+2} = 0{,}97 \times (1{,}03P_{2n}) = 0{,}9991P_{2n}, \text{ soit } u_{n+1} = 0{,}9991 \times u_n.$$

La suite (u_n) est donc une suite géométrique de raison 0,9991 donc :

$$\boldsymbol{u_{n+1} = 0{,}9991 \times u_n \text{ et } P_{2n} = 0{,}9991^n P_0}.$$

c. $0 < u_0$ et $0 < 0{,}9991 < 1$, donc **la suite $\boldsymbol{(u_n)}$ est strictement décroissante.**
On en déduit que $u_n < u_0$, d'où : $\boldsymbol{P_{2n} < P_0}$.

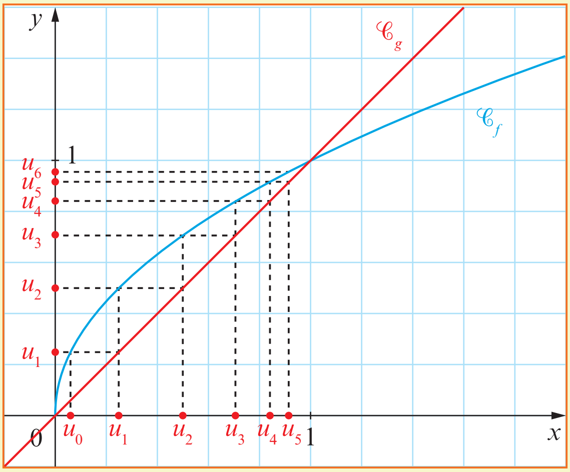
d. Avec un taux de $i\,\%$, la raison de la suite (P_{2n}) serait :

$$\left(1+\frac{i}{100}\right)\left(1-\frac{i}{100}\right) = 1 - \frac{i}{100} + \frac{i}{100} - \frac{i^2}{10\,000} = 1 - \frac{i^2}{10\,000}.$$

Or $0 < 1 - \frac{i^2}{10\,000} < 1$, donc **la suite $\boldsymbol{(P_{2n})}$ est toujours strictement décroissante**.

16 SUITE $u_{n+1} = f(u_n)$

1.



2. On lit : $\boldsymbol{u_1 = 0{,}25}$.

3. $\boldsymbol{u_2 = 0{,}5}$ puis $\boldsymbol{u_3 \approx 0{,}65}$.

4. On observe que les termes u_n augmentent et se rapprochent de l'abscisse du point d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, c'est-à-dire que **les termes u_n semblent se rapprocher de la valeur limite 1**.

5. a. Ce programme commence par créer une liste contenant u_0. Ensuite, il répète 13 fois (i va de 1 à 14–1=13) un calcul qui consiste à prendre la racine carrée du dernier terme de la liste, et à ajouter le résultat à la fin de la liste.
Autrement dit, il calcule $\sqrt{u_0} = u_1$, u_1 est mis à la fin de la liste, puis il calcule $\sqrt{u_1} = u_2$, u_2 est mis à la fin de la liste, etc… jusqu'à $\sqrt{u_{13}} = u_{14}$.
Et à la fin, le programme affiche la liste, donc **il affiche la liste des 15 premiers termes de la suite (u_n)**.

b. Il semble que quelle que soit la valeur choisie pour u_0, **la suite tend vers la même limite : 1**.

6. a. Il suffit de modifier la ligne 5 par : **L.append(L[-1]**2)**.

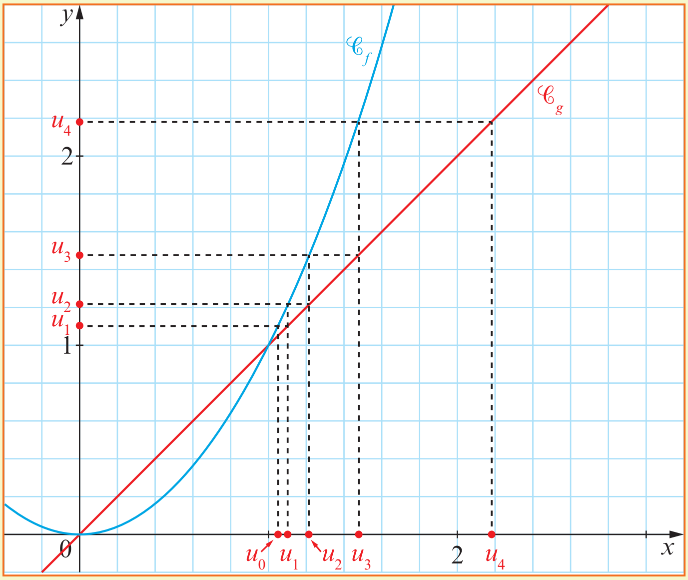
b. Si $0 \leqslant u_0 < 1$, la suite (u_n) semble converger vers 0.
Par exemple, avec $u_0 = 0{,}9$, on obtient :

[0.9, 0.81, 0.6561000000000001, 0.43046721000000016, 0.18530201888518424, 0.03433683820292518, 0.001179018457773862, 1.390084523771456e-06, 1.9323349832289153e-12, 3.733918487410292e-24, 1.3942147270624363e-47, 1.943834705157784e-94, 3.7784933609758484e-188, 0.0]

La dernière valeur n'est en réalité pas exactement égale à 0, mais elle en est tellement proche qu'elle dépasse la précision d'affichage de l'ordinateur.

Si $u_0 = 1$, la suite est constamment égale à 1.
Si $u_0 > 1$, alors la suite semble diverger (tendre vers $+\infty$).

Par exemple, graphiquement avec $u_0 = 1{,}05$:



Le logiciel quant à lui renvoie une erreur pour des valeurs de u_0 trop grandes, mais pour 1,05, on obtient :

[1.05, 1.1025, 1.21550625, 1.4774554437890626, 2.182874588381936, 4.764941468603607, 22.7046671992183, 515.5019126272593, 265742.2219223625, 70618928512.23416, 4.987033064216039e+21, 2.487049878358401e+43, 6.185417097442538e+86, 3.8259384669334475e+173]

17 DES LAPINS AU NOMBRE D'OR

1. Cellule A2 : **1** ; cellule B2 : **0** ; cellule C2 : **1**.
Cellule A3 : = **A2 + 1** ; cellule B3 : = **B2 + C2** ; cellule C3 : = **B2**.
On étend la ligne 3 jusqu'à la ligne 31.
Pour la suite (T_n) :
dans la cellule D2 : = **B2 + C2**.
On étend cette formule jusqu'à la case D31.

	A	B	C	D
1	n	A_n	I_n	T_n
2	1	0	1	1
3	2	1	0	1
4	3	1	1	2
5	4	2	1	3
6	5	3	2	5
7	6	5	3	8

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$T_{n+2} = A_{n+2} + I_{n+2}.$$

Or $A_{n+2} = A_{n+1} + I_{n+1} = T_{n+1}$ et $I_{n+2} = A_{n+1} = A_n + I_n = T_n$, donc :

$$\boldsymbol{T_{n+2} = T_{n+1} + T_n}.$$

3. En divisant membre à membre par T_n ($\neq 0$ car c'est un nombre de lapins) :

$$\frac{T_{n+2}}{T_n} = \frac{T_{n+1}}{T_n} + \frac{T_n}{T_n} = \frac{T_{n+1}}{T_n} + 1.$$

D'où la relation :

$$\frac{T_{n+2}}{T_{n+1}} \times \frac{T_{n+1}}{T_n} = \frac{T_{n+2}}{T_n} \times \frac{T_{n+1}}{T_{n+1}} = \frac{T_{n+1}}{T_n} + 1.$$

4. Colonne E du tableur, on entre en E2 la formule : = **D3 / D2**.
On étend cette formule jusqu'à la ligne 30.
Il semble que les termes de la suite (u_n) convergent vers la valeur 1,618 033 99.

5. $x^2 = x + 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$.
$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 5 > 0$ donc il y a deux racines :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Seule cette dernière solution est positive, c'est φ.

6. a. Dans la cellule F2, on saisit : = ABS(E2 – (1 + RACINE(5)) / 2),
on l'étend avec la poignée de recopie et on constate que :

$$|u_n - \varphi| < 10^{-6} \text{ à partir de } n = 15.$$

Penser à augmenter le nombre de décimales de l'affichage.

b.

```
from math import*
A = 1
I = 0
T = 1
U = 0
n = 0
while abs (U – (1+sqrt(5))/2) > 10** - 6:
    I = A
    A = T
    T = A+ I
    U = T/A
    n = n+1
print (n)
```

Ce programme doit commencer à $n = 0$ car on commence avec $u_1 = \frac{T_2}{T_1}$ et $n = 1$ dès la première boucle.

3 Fonctions polynômes du second degré

I FONCTION PRODUIT DE DEUX POLYNÔMES DU PREMIER DEGRÉ

On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (mx + p)(nx + q)$, où m, n, p, q sont des constantes telles que $m \neq 0$ et $n \neq 0$.

1. Solutions de l'équation $f(x) = 0$

Rappel : Un produit est nul *si, et seulement si,* l'un des facteurs est nul.

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow (mx + p)(nx + q) = 0 \\ &\Leftrightarrow mx + p = 0 \text{ ou } nx + q = 0 \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{p}{m} \text{ ou } x = -\frac{q}{n} \end{aligned}$$

Cas particulier :

Si $f(x) = k(mx + p)^2$, où k, m, p sont des constantes avec $k \neq 0$ et $m \neq 0$, alors :

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow k \times (mx + p)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (mx + p)^2 = 0 \qquad \text{(on divise par } k \neq 0) \\ &\Leftrightarrow mx + p = 0 \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{p}{m} \text{ (car } m \neq 0) \end{aligned}$$

2. Signe de $f(x)$

x	$-\infty$		$-\frac{p}{m}$		$-\frac{q}{n}$		$+\infty$
Signe de $mx + p$		signe de $-m$	0	signe de m	|	signe de m	
Signe de $nx + q$		signe de $-n$	|	signe de $-n$	0	signe de n	
Signe de $f(x) = (mx + p)(nx + q)$		signe de mn	0	signe de $-mn$	0	signe de mn	

3. Forme développée de f

La fonction $f : x \mapsto (mx + p)(nx + q)$ avec $m \neq 0$ et $n \neq 0$, peut aussi s'écrire sous forme développée $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.

II FONCTION POLYNÔME DU SECOND DEGRÉ

1. Forme développée

DÉFINITION :

On appelle **fonction polynôme** du second degré toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax^2 + bx + c$, où a , b et c désignent des réels quelconques avec $a \neq 0$.

a s'appelle coefficient du terme de plus haut degré,
b s'appelle coefficient du terme de degré 1,
c s'appelle coefficient constant.
À partir de maintenant, a, b et c désigneront trois réels.

2. Forme canonique

PROPRIÉTÉ :

Toute fonction polynôme du second degré $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$, peut s'écrire sous forme canonique :

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta, \text{ avec } \alpha = -\frac{b}{2a} \text{ et } \beta = f(\alpha).$$

3. Discriminant

DÉFINITION :

On appelle **discriminant** de la fonction $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$, le réel Δ :

$$\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$$

La forme canonique de f s'écrit alors : $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$.

4. Racines et factorisation éventuelle

DÉFINITION : On appelle **racine** de la fonction polynôme f du second degré toute solution de l'équation $f(x) = 0$.

THÉORÈME :

Soit $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$. Alors :

• **1er cas** : $\mathbf{\Delta > 0}$, f admet deux racines distinctes x_1 et x_2 :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Pour tout réel x, $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

• **2e cas** : $\mathbf{\Delta = 0}$, f admet une unique racine (dite double x_0) : $x_0 = -\frac{b}{2a}$.

Pour tout réel x, $f(x) = a(x - x_0)^2$.

• **3e cas** : $\mathbf{\Delta < 0}$, f n'admet pas de racine réelle et l'expression $f(x)$ ne peut être factorisée dans $\mathbb{R}$.

5. Signe de $f(x)$

THÉORÈME :

Soit $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.

• **1er cas :** $\Delta > 0$

Notons x_1 et x_2, avec $x_1 < x_2$, les racines de f.
Le tableau de signe de f est le suivant :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
signe de $f(x)$		signe de a	0	signe de $(-a)$	0	signe de a	

On retient : $f(x)$ est du signe de a à « l'extérieur des racines » et du signe de $-a$ entre les racines .

• **2e cas :** $\Delta = 0$

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
signe de $f(x)$		signe de a	0	signe de a	

On retient : $f(x)$ est toujours signe de a, et s'annule en x_0.

• **3e cas :** $\Delta < 0$

$f(x)$ est du signe de a pour tout réel x.

On retient : $f(x)$ est toujours signe de a.

6. Somme et produit des racines

PROPRIÉTÉ :

Soit $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.
On suppose ici que $\Delta \geqslant 0$.
En notant s la somme de ses racines ($s = 2x_0$ si $\Delta = 0$) p le produit de ses racines ($p = x_0^2$ si $\Delta = 0$), on obtient alors les relations :

$$\boxed{s = -\frac{b}{a} \text{ et } p = \frac{c}{a}}$$

Déterminer deux réels x_1 et x_2 connaissant leur somme s et leur produit p revient à déterminer les racines de la fonction polynôme du second degré : $x \mapsto x^2 - sx + p$.

MÉTHODE 1

Factorisation à l'aide d'une racine évidente ou d'une identité remarquable

➜ Voir les exos 2, 3, 8, 11 et 15

Pour factoriser $f(x) = ax^2 + bx + c$, on peut parfois se passer du calcul du discriminant, évitant ainsi de fastidieux calculs ; on liste quatre cas :

1er cas : $c = 0$; 0 est une racine évidente et l'on peut factoriser $f(x)$ par x.

2e cas : $b = 0$;
Si a et c sont de signes contraires, alors on factorise $f(x)$ à l'aide de la 3e identité remarquable.
Sinon, on ne peut pas factoriser $f(x)$.

3e cas : on trouve une racine évidente x_1 (parmi les réels 0, ± 1; ± 2), alors $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ et on trouve x_2 à l'aide par exemple de l'égalité sous le produit des racines : $x_1 \times x_2 = \dfrac{c}{a}$.

4e cas : on reconnaît la 1re ou le 2e identité remarquable, alors $f(x)$ se factorise en $a(x \pm ...)^2$.

Rappels : les première, deuxième et troisième identités remarquables sont

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$$
$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$$
$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

Exo résolu

Factoriser : $f(x) = 2x^2 - 13x$; $g(x) = x^2 - 5$; $h(x) = 4x^2 - 12x + 9$; $k(x) = x^2 - 7x + 6$.

CORRIGÉ

- $f(x) = 2x^2 - 13x$. C'est le **1er cas** ; on peut factoriser par x :
$$f(x) = x(2x - 13) = 2x(x - 6{,}5).$$
- $g(x) = x^2 - 5$. C'est le **2e cas** et à l'aide de la 3e identité remarquable :
$$g(x) = x^2 - 5 = x^2 - \sqrt{5}^2 = (x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5}).$$
- $h(x) = 4x^2 - 12x + 9$. On reconnaît la 2e identité remarquable (**4e cas**) :
$$h(x) = (2x)^2 - 2 \times 2x \times 3 + 3^2 = (2x - 3)^2.$$
- $k(x) = 3x^2 - 15x + 12$. 1 est une racine évidente de k (**3e cas**). On factorise donc $k(x)$ par $(x - 1)$, ce qui donne :
$$k(x) = 3(x - 1)(x - x_2)$$
Et on a d'après la formule sur le produit des racines :
$$1 \times x_2 = \frac{12}{3} \Leftrightarrow x_2 = 4.$$
Ainsi, $k(x) = 3(x - 1)(x - 4)$

MÉTHODE 2

Mettre sous forme canonique un trinôme du second degré

➜ Voir les exos 7, 15, 19 et 21.

Pour écrire l'expression $ax^2 + bx + c$ sous forme canonique, il faut distinguer deux cas, selon que $a = 1$ ou $a \neq 1$.

Si $a = 1$:

1re étape. Regarder les deux premiers termes $x^2 + bx$ comme étant le début de la 1re ou 2e identité remarquable : $x^2 + bx = x^2 + 2 \times x \times \ldots$

2e étape. Dans l'expression du trinôme, faire apparaître l'identité remarquable reconnue en ajoutant $+\ldots^2 - \ldots^2$ (qui vaut 0 et ne modifie donc pas le trinôme initial).

Si $a \neq 1$, on factorise par a, ce qui donne :

$$ax^2 + bx + c = a[x^2 + \ldots + \ldots].$$

On met ensuite sous forme canonique l'expression entre crochets (pour laquelle $a = 1$), comme dans le cas précédent.

Exo résolu

Mettre sous forme canonique $x^2 + 10x + 7$, puis $2x^2 - 28x - 1$.

CORRIGÉ

• Forme canonique de $x^2 + 10x + 7$.

1re étape. On reconnaît dans les deux premiers termes $x^2 + 10x$ le début d'une identité remarquable :

$$x^2 + 10x = x^2 + 2 \times x \times 5.$$

2e étape. Pour faire apparaître l'expression complète qui est le début de $x^2 + 2 \times x \times 5 + 5^2$, on introduit le terme $+5^2 - 5^2$ (on peut puisqu'il vaut 0) :

$$\begin{aligned} x^2 + 10x + 7 &= x^2 + 2 \times x \times 5 + 5^2 - 5^2 + 7 \\ &= (x^2 + 2 \times x \times 5 + 5^2) - 25 + 7 \\ &= \mathbf{(x + 5)^2 - 18}. \end{aligned}$$

Dans les deux dernières lignes :

– on a regroupé les trois premiers termes dont la somme s'écrit sous forme factorisée $(x + 5)^2$.

– on a ajouté les deux derniers termes entre eux.

• Forme canonique de $2x^2 - 28x - 1$.

1re étape. On factorise $2x^2 - 28x - 1$ par $a = 2$:

$$2x^2 - 28x - 1 = 2\left[x^2 - 14x - \frac{1}{2}\right].$$

2e étape. On met sous forme canonique l'expression entre crochets $x^2 - 14x - \dfrac{1}{2}$:

$$x^2 - 14x - \frac{1}{2} = x^2 - 2 \times x \times 7 + 7^2 - 7^2 - \frac{1}{2}$$
$$= (x^2 - 2 \times x \times 7 + 7^2) - 49 - \frac{1}{2}$$
$$x^2 - 14x - \frac{1}{2} = (x-7)^2 - \frac{99}{2}$$

On revient à la fonction polynôme initiale :

$$2x^2 - 28x - 1 = 2\left[(x-7)^2 - \frac{99}{2}\right] = \mathbf{2(x-7)^2 - 99}.$$

MÉTHODE 3

Résoudre une inéquation

➜ **Voir les exos 9, 14, 16 et 20.**

1re étape. Se ramener à un second membre nul.

2e étape. Déterminer les racines de la fonction polynôme ainsi obtenue.

3e étape. Dresser le tableau de signes de cette fonction.

4e étape. Conclure en revenant à l'inéquation de l'énoncé.

Exo résolu

Résoudre l'inéquation : $2x^2 - 5x + 17 \geqslant x^2 + 6x - 13$.

CORRIGÉ

1re étape : $2x^2 - 5x + 17 \geqslant x^2 + 6x - 13 \Leftrightarrow x^2 - 11x + 30 \geqslant 0$.

2e étape : $\Delta = 11^2 - 4 \times 1 \times 30 = 1 > 0$,

la fonction polynôme $x \mapsto x^2 - 11x + 5$ admet donc deux racines,

$$x_1 = \frac{11-1}{2} = 5 \text{ et } x_2 = \frac{11+1}{2} = 6.$$

3e étape : Comme $a = 1 > 0$, $x^2 - 11x + 30$ est positif à l'extérieur des racines :

x	$-\infty$		5		6		$+\infty$
signe de $x^2 - 11x + 30$		+	0	–	0	+	

4e étape

$$2x^2 - 5x + 17 \geqslant x^2 + 6x - 13 \Leftrightarrow x^2 - 11x + 30 \geqslant 0$$
$$\Leftrightarrow \boldsymbol{x \in \left]-\infty\,;5\right] \cup \left[6\,;+\infty\right[}.$$

Attention, il faut penser à placer les racines dans l'ordre croissant dans le tableau et bien vérifier si les crochets de l'ensemble des solutions sont ouverts ou fermés, selon que l'inégalité demandée est stricte ou pas.

TESTER SES CONNAISSANCES

1 FONCTIONS SOUS FORME FACTORISÉE
★ | 25 min | ▸ P. 79

Sans écrire aucun calcul, donner, pour chacune des fonctions polynômes f, g, h :

a. Le coefficient du terme de plus haut degré et son terme constant.

b. Ses racines.

c. Son tableau de signes sur $\mathbb{R}$.

d. Le signe de l'image de 1 par la fonction polynôme considérée.

• $f : x \mapsto (2x+1)(x-5)$ • $g : x \mapsto (x+1)^2$ • $h : x \mapsto (3x-2)\left(5-\frac{x}{2}\right)$.

Le terme de plus haut degré s'obtient en multipliant les termes de plus haut degré de chaque facteur, le terme constant s'obtient en multipliant les termes constants de chaque facteur.

2 FACTORISATION À PARTIR DE LA FORME RÉDUITE
★★ | 25 min | ▸ P. 80

Factoriser à l'aide d'une identité remarquable ou d'une racine évidente, quand c'est possible, les polynômes ci-dessous et donner toutes leurs racines.

a. $f : x \mapsto x^2 + x - 6$ **b.** $g : x \mapsto 3x^2 + 2x$

Trouver une racine évidente.

c. $h : x \mapsto \dfrac{x^2}{4} - 16$ **d.** $k : x \mapsto x^2 + 6x + 9$

e. $u : x \mapsto -2x^2 - 10$

3 FACTORISATION À PARTIR DE LA FORME CANONIQUE
★ | 20 min | ▸ P. 80

Examiner chacun des cas suivants et, lorsque c'est possible, factoriser la fonction f et déterminer ses racines.

a. $f(x) = (x-3)^2 - 25$ **b.** $f(x) = (x+5)^2 - 7$ **c.** $f(x) = (x-5)^2 + 1$

d. $f(x) = \left(x + \dfrac{2}{3}\right)^2$ **e.** $f(x) = 25\left(x + \dfrac{2}{3}\right)^2 - 9$ **f.** $f(x) = 5\left(x + \dfrac{2}{3}\right)^2 - 3$

4 DISCRIMINANT, RACINES ET SIGNE
★ | 25 min | ▸ P. 81

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 7x - 15$.
Après avoir calculé son discriminant :

a. déterminer, si possible, ses racines et sa factorisation éventuelle,

b. dresser son tableau de signes.

2. Mêmes questions pour la fonction g définie pour tout réel x par :

$$g(x) = \sqrt{3}x - \frac{3}{4} - x^2.$$

3. Mêmes questions pour la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = x^2 + x + 1.$$

5 CHOIX DE LA FORME APPROPRIÉE | ★ | 25 min | ▶ P. 81

Soit f la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 - 4x - 12.$$

1. Établir que $f(x)$ s'écrit sous forme canonique : $f(x) = (x-2)^2 - 16$.

Voir la méthode 2.

2. À partir de la forme canonique, factoriser de $f(x)$.

3. En choisissant chaque fois l'écriture de $f(x)$ la mieux adaptée, répondre aux questions suivantes :

a. le(s) antécédent(s) de –16.

b. l'image de 0.

c. l'image de 6.

d. l'image de 2.

e. le(s) antécédent(s) de -12.

f. le(s) antécédent(s) de 0.

6 POLYNÔMES DE RACINES DONNÉES | ★ | 15 min | ▶ P. 82

1. a. Déterminer toutes les fonctions polynômes du second degré s'annulant en 5 et $-\frac{1}{2}$.

b. Déterminer celle d'entre elles par laquelle 0 a pour image 100.

2. Déterminer la fonction polynôme du second degré g dont les racines sont 0 et $\frac{7}{11}$ et telle que $g(1) = \frac{4}{11}$.

7 MISE SOUS FORME CANONIQUE | ★★ | 20 min | ▶ P. 82

f désigne une fonction polynôme du second degré.
Déterminer la forme canonique de f, dans chacun des cas suivants :

a. $f(x) = x^2 + 4x + 9$ **b.** $f(x) = x^2 - 6x$ **c.** $f(x) = x^2 + 3x + 1$

Voir la méthode 2.

S'ENTRAÎNER

8 FACTORISATION

★★ | 20 min | ▸ P. 83

Sans calculer le discriminant, factoriser et déterminer les racines des fonctions f suivantes :

a. $f : x \mapsto 121x^2 - 110x + 25.$

Penser à des identités remarquables.

b. $f : x \mapsto 2x^2 - x - 10.$

Trouver une racine évidente.

c. $f : x \mapsto -x^2 + 9$ **d.** $f : x \mapsto x^2 + x\sqrt{3} + \dfrac{3}{4}$

9 INÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ

★★ | 20 min | ▸ P. 83

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a. $3x^2 > 2x + 1$ **b.** $x + 3 \leqslant -x^2$ **c.** $x^2 \leqslant 6x - 1$

Voir la méthode 4.

10 CONTRAINTES AU RESTAURANT

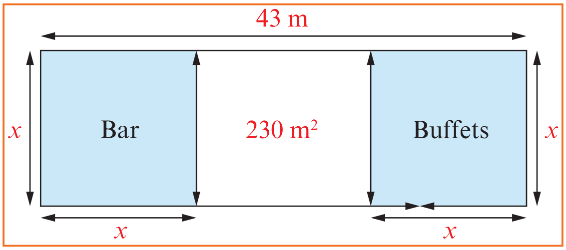
★★ | 20 min | ▸ P. 84

a. Résoudre l'équation $-2x^2 + 43x - 230 = 0$.

b. M. Gérard, restaurateur, décide de faire construire une nouvelle salle de restaurant. Il s'agira d'une grande pièce rectangulaire de 43 mètres de long. À l'une des extrémités et sur la largeur de la salle, une partie carrée est destinée à l'espace Bar.

À l'autre extrémité, un espace identique est destiné aux buffets (voir schéma).

La partie centrale, devant accueillir les tables des clients, occupera une aire de 230 m^2.



Quelles peuvent être les largeurs possibles de la salle ?

Laquelle choisira-t-il s'il souhaite que l'espace attribué aux tables occupe plus de 50 % de la surface totale ?

11 ÉQUATION DU 3e DEGRÉ

★★ | 25 min | ▸ P. 84

Le but de cet exercice est de trouver les racines du polynôme f défini sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x^3 - 5x^2 - x + 6.$$

a. Montrer que -1 est racine de f.

b. Trouver les nombres réels a, b, c tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = (x+1)(ax^2 + bx + c).$$

Développer $(x+1)(ax^2+bx+c)$, puis comparer les coefficients de même degré des deux expressions de $f(x)$.

c. Déterminer les racines du polynôme du second degré trouvé dans la question précédente.

d. En déduire la forme factorisée de f.

12 SYSTÈMES D'ÉQUATIONS

★★ | 20 min | ▸ P. 85

Déterminer tous couples de réels $(x_1 ; x_2)$ tels que :

a. $\begin{cases} x_1 + x_2 = -7 \\ x_1x_2 = 10 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{5}{12} \\ x_1x_2 = \dfrac{1}{24} \end{cases}$

c. $\begin{cases} x_1 + x_2 = -2 \\ x_1x_2 = 1 \end{cases}$

d. $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3\sqrt{3} \\ x_1x_2 = -12 \end{cases}$

Voir le cours II.6.

13 RACINES D'UN POLYNÔME EN PYTHON

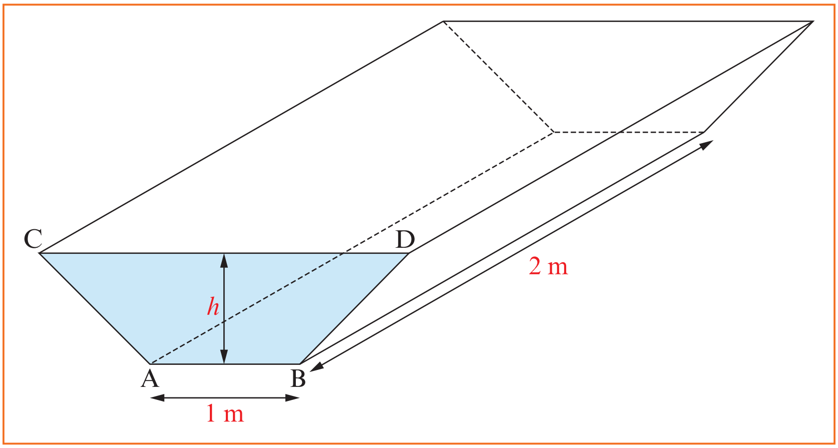
★★ | 25 min | ▸ P. 86

Écrire un algorithme, puis le coder en Python, calculant les racines d'un polynôme du second degré.

En Python, le polynôme sera défini par **une liste** contenant ses coefficients rangés suivant les puissances décroissantes.
La fonction Python renverra un message contenant le nombre de racines et leurs valeurs ; elle pourra aussi renvoyer un message d'erreur si le coefficient du terme du second degré est nul.

14 PROBLÈME CONCRET ★★ 30 min ▸ P. 87

L'abreuvoir ci-dessous a une longueur de 2 mètres, et son fond a une largeur de 1 mètre.
On note h la hauteur de l'abreuvoir, exprimée en mètres.
L'angle entre l'horizontale et les parois de l'abreuvoir mesure $45°$.



1. Exprimer l'aire $\mathscr{A}$ du trapèze isocèle ABCD en fonction de h.
2. Démontrer que le volume de l'abreuvoir est donné par :

$$V(h) = 2h^2 + 2h.$$

3. Quelle hauteur donner à l'abreuvoir pour qu'il ait une capacité de 1 000 litres ?
4. a. Écrire et résoudre l'inéquation que doit vérifier h pour que le volume de l'abreuvoir soit d'au moins 2 000 L.
b. Quelle est la hauteur h minimale recherchée ?
Donner une valeur approchée de h à 10^{-2} près.

PRÉPARER UN CONTRÔLE

15 CHOIX DE LA FORME LA MIEUX ADAPTÉE | ★★ | 25 min | ▸ P. 88

Soit f la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 6x - 3$.

1. Déterminer la forme canonique de $f(x)$.

> Voir la méthode 2.

2. À l'aide de **1.**, factoriser $f(x)$.

3. Déterminer, en choisissant la forme la mieux adaptée de $f(x)$:

a. les antécédents de –6 par f ;

b. les antécédents de 0 par f ;

c. les antécédents de –3 par f.

4. Dresser le tableau de signes de f.

16 RÉSOLUTION D'(IN)ÉQUATIONS DANS $\mathbb{R}^+$ | ★★ | 15 min | ▸ P. 88

a. Résoudre dans $\mathbb{R}^+$ l'équation $x^2 - 2x - 3 = 0$.

b. Résoudre dans $\mathbb{R}^+$ l'équation $3x^2 + x - 1 < 0$, puis l'inéquation :

$$3x^2 + x - 1 \geqslant 0.$$

> Il s'agit de résoudre normalement les (in)équations, puis de restreindre l'ensemble des solutions aux réels positifs.

17 SOMME ET PRODUIT DES RACINES EN PYTHON | ★★ | 20 min | ▸ P. 89

Soient a, b et c trois réels tels que $a \neq 0$ et $\Delta = b^2 - 4ac \geqslant 0$.
On appelle f la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

1. Rappeler les formules liant le produit p et la somme s des racines aux coefficients de f.

2. Écrire, en Python, une fonction qui à f et à une racine évidente x_1 de f affiche la somme, le produit des racines et la deuxième racine de f.

> f sera défini par une liste contenant ses coefficients rangés suivant les puissances décroissantes.

3. Tester votre fonction avec les fonctions f suivantes :

a. $f(x) = 3x^2 - x - 2$ (racine évidente 1).

b. $f(x) = -2x^2 + 6x$ (racine évidente 0).

4. *Facultatif* : compléter votre fonction pour qu'elle renvoie un message d'erreur si les conditions $a \neq 0, \Delta \geqslant 0$ ne sont pas vérifiées.

ALLER PLUS LOIN

18 NOMBRE D'OR

★★★ | 30 min | ▶ P. 90

On appelle nombre d'or le nombre $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

a. Vérifier que $\Phi^2 = \Phi + 1$. En déduire que :

$$\frac{1}{\Phi} = \Phi - 1.$$

b. À l'aide de la somme des racines, déterminer l'autre solution de l'équation $x^2 = x + 1$.

c. Vérifier le résultat obtenu en calculant le produit des racines.

d. Déterminer la fonction polynôme du second degré qui a pour racines les nombres Φ et Φ^2, et dont l'image de 0 vaut 1.

Pour calculer *a*, penser à la troisième identité remarquable.

19 FORME CANONIQUE DÉMONSTRATION

★★★ | 45 min | ▶ P. 91

1. Déterminer la forme canonique et déduire les racines de la fonction

$$f : x \mapsto 2x^2 - 12x + 5.$$

Voir la méthode 2.

2. Cas général : soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, a désignant un réel non nul.

a. Factoriser par a l'expression de $f(x)$.

b. Mettre sous forme canonique $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$.

c. En déduire que :

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right],$$

où $\Delta = b^2 - 4ac$.

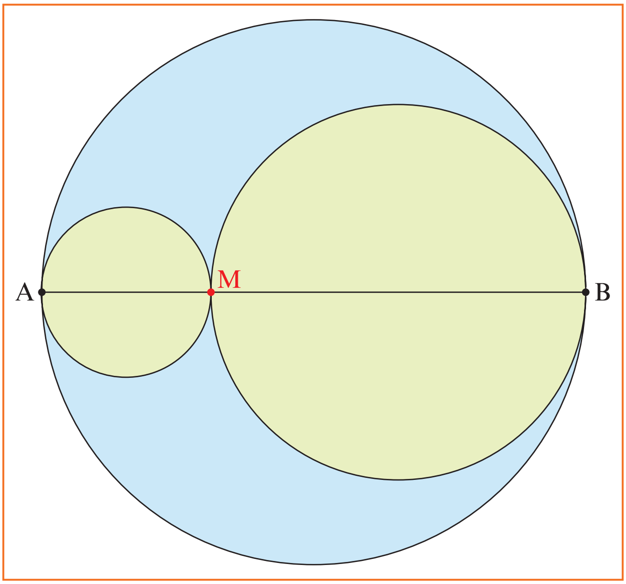
d. On se place dans le cas où $\Delta > 0$.

En écrivant $\Delta = \sqrt{\Delta}^2$, factoriser $f(x)$ en un produit de facteurs du premier degré.

20 PROBLÈME DE GÉOMÉTRIE

★★★ | 45 min | ▶ P. 91

Soit A et B deux points du plan tels que $AB = 4$.
M est un point variable du segment [AB] et on pose $AM = x$.
La figure ci-après est constituée du cercle de diamètre [AB], et des cercles de diamètres [AM] et [MB].
On note $\mathscr{A}(x)$ l'aire de la surface bleue, et $\mathscr{B}(x)$ l'aire de la surface verte (somme des aires des deux disques de diamètres [AM] et [MB]).



a. Montrer que l'aire $\mathscr{B}(x)$ de la surface verte est donnée par :

$$\mathscr{B}(x) = \pi\left(\frac{x^2}{2} - 2x + 4\right).$$

b. En déduire que $\mathscr{A}(x) = \pi\left(-\frac{x^2}{2} + 2x\right)$.

c. Déterminer les positions de M pour lesquelles l'aire de la surface bleue est égale au quart de l'aire du disque de diamètre [AB].

d. Déterminer les positions du point M pour lesquelles $\mathscr{A}(x)$ est inférieure ou égale à la moitié de $\mathscr{B}(x)$.

21 ÉQUATION AVEC PARAMÈTRE

★★★ | 20 min | ▶ P. 92

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + bx + 6$, où b désigne un nombre réel.

1. Mettre f sous forme canonique.

2. Déterminer le(s) valeur(s) de b pour lesquelles :

a. f admet une unique racine.

b. f admet deux racines distinctes.

c. f n'admet pas de racine réelle.

CORRIGÉS

1 FONCTIONS SOUS FORME FACTORISÉE

• **Pour f :**

a. Le terme de plus haut degré de f vaut $2x \times x = 2x^2$; donc **2** est le coefficient de plus haut degré. Son terme constant vaut $1 \times (-5) = \mathbf{-5}$.

b. f a pour racines $-\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$ (qui annule le facteur $(2x+1)$) et **5** (qui annule le facteur $(x-5)$).

c.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		1		5		$+\infty$
Signe de $(2x+1)$		$-$	0			$+$	|	$+$	
Signe de $(x-5)$		$-$	|			$-$	0	$+$	
Signe de $f(x)$		$+$	0		$f(1)$	$-$	0	$+$	

d. $\boldsymbol{f(1) < 0}$.

Placer 1 dans la première ligne du tableau.

• **Pour g :**

a. Le terme de plus haut degré de g est x^2 ; donc le coefficient du terme de plus haut degré de g est 1. Son terme constant est $1^2 = \mathbf{1}$.

b. g admet une unique racine : c'est $\mathbf{-1}$ (qui annule $(x+1)$).

c.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
Signe de $g(x) = (x+1)^2$		$+$	0	$+$	

d. $\boldsymbol{g(1) > 0}$.

• **Pour h :**

a. Le terme de plus haut degré de h est $3x \times \left(-\dfrac{x}{2}\right) = -\dfrac{3x^2}{2}$;

donc $-\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}$ est le coefficient du terme de plus haut degré.

Son terme constant est $(-2) \times 5 = \mathbf{-10}$.

b. Ses racines sont $\dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$ et $\mathbf{10}$.

c.

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		10		$+\infty$
Signe de $(3x-2)$		$-$	0	$+$	|	$+$	
Signe de $\left(5-\frac{x}{2}\right)$		$+$	|	$+$	0	$-$	
Signe de $h(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

d. $\boldsymbol{h(1) < 0}$.

2 FACTORISATION À PARTIR DE LA FORME RÉDUITE

a. $f(2) = 2^2 + 2 - 6 = 0$ donc 2 est une racine évidente de f.
En notant x_2 l'autre racine de f et à l'aide de la formule sur le produit des racines :

$$2 \times x_2 = -6 \Leftrightarrow x_2 = -3.$$

Ainsi, $\boldsymbol{f(x) = (x-2)(x+3)}$.

b. $g(x) = x(3x+2) = 3x\left(x + \dfrac{2}{3}\right)$. Les racines de g sont donc 0 et $\boldsymbol{-\dfrac{2}{3}}$.

c. $h(x) = \dfrac{1}{4}(x^2 - 64) = \dfrac{1}{4}(x-8)(x+8)$. Les racines de h sont **8** et **–8**.

d. $k(x) = x^2 + 2 \times 3 \times x + 3^2 = (x+3)^2$. k admet une racine double : –**3**.

e. Puisque $x^2 \geqslant 0$, on remarque que pour tout réel x, $u(x) < 0$.
***u* n'admet donc pas de racine et ne se factorise pas**.

3 FACTORISER À PARTIR DE LA FORME CANONIQUE

Appliquer la 3e identité remarquable $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

a. $f(x) = (x-3)^2 - 25 = (x-3)^2 - 5^2 = (x-3-5)(x-3+5) = (x-8)(x+2)$.
Les racines de f sont donc **8** et **–2**.

b. $f(x) = (x+5)^2 - 7 = (x+5)^2 - \sqrt{7}^2 = (x+5-\sqrt{7})(x+5+\sqrt{7})$
Les racines de f sont donc $\boldsymbol{-5+\sqrt{7}}$ et $\boldsymbol{-5-\sqrt{7}}$.

c. $f(x) = (x-5)^2 + 1$. Pour tout x réel, $(x-5)^2 \geqslant 0$ donc $f(x) \geqslant 1$.
L'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution, ce qui signifie que ***f* n'admet pas de racine et donc que *f*(*x*) ne peut pas être factorisée**.

d. $f(x) = \left(x + \dfrac{2}{3}\right)^2$. $f(x)$ est déjà factorisée (c'est un produit).
***f* admet donc une unique racine :** $\boldsymbol{-\dfrac{2}{3}}$.

e. $f(x) = 25\left(x + \dfrac{2}{3}\right)^2 - 9 = 25\left[\left(x+\dfrac{2}{3}\right)^2 - \dfrac{9}{25}\right] = 25\left[\left(x+\dfrac{2}{3}\right)^2 - \left(\dfrac{3}{5}\right)^2\right]$

$f(x) = 25\left(x + \dfrac{2}{3} - \dfrac{3}{5}\right)\left(x + \dfrac{2}{3} + \dfrac{3}{5}\right) = 25\left(x + \dfrac{1}{15}\right)\left(x + \dfrac{19}{15}\right)$

Les racines de *f* sont donc $\boldsymbol{-\dfrac{1}{15}}$ **et** $\boldsymbol{-\dfrac{19}{15}}$.

f. $f(x) = 5\left(x + \dfrac{2}{3}\right)^2 - 3 = 5\left[\left(x+\dfrac{2}{3}\right)^2 - \dfrac{3}{5}\right] = 5\left[\left(x+\dfrac{2}{3}\right)^2 - \sqrt{\dfrac{3}{5}}^2\right]$

$f(x) = 5\left(x + \dfrac{2}{3} - \sqrt{\dfrac{3}{5}}\right)\left(x + \dfrac{2}{3} + \sqrt{\dfrac{3}{5}}\right)$

Les racines de f sont donc :

$-\dfrac{2}{3} + \sqrt{\dfrac{3}{5}} = \dfrac{-2\sqrt{5} + 3\sqrt{3}}{3\sqrt{5}} = \dfrac{(-2\sqrt{5} + 3\sqrt{3}) \times \sqrt{5}}{3\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \boldsymbol{\dfrac{-10 + 3\sqrt{15}}{15}}$,

et $-\dfrac{2}{3} - \sqrt{\dfrac{3}{5}} = \dfrac{-2\sqrt{5} - 3\sqrt{3}}{3\sqrt{5}} = \dfrac{(-2\sqrt{5} - 3\sqrt{3}) \times \sqrt{5}}{3\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \boldsymbol{\dfrac{-10 - 3\sqrt{15}}{15}}$.

Pour avoir des entiers au dénominateur, on multiplie numérateur et dénominateur par $\sqrt{5}$.

4 DISCRIMINANT, RACINES ET SIGNES

1. a. $f(x) = 2x^2 - 7x - 15 = ax^2 + bx + c$ avec $a = 2\,;b = -7\,;c = -15$.
Calcul du discriminant :
$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \times 2 \times (-15) = 49 + 120 = 169$.
$\Delta > 0$ donc f admet deux racines x_1 et x_2 :

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7+13}{2\times 2} = 5 \text{ et } x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7-13}{2\times 2} = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$$

Ainsi pour tout réel x, $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2) = \mathbf{2(x-5)\left(x+\frac{3}{2}\right)}$.

b. $a = 2 > 0$ donc f est « positive à l'extérieur des racines » :

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		5		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Penser à ranger les racines par ordre croissant.

2. a. $g(x) = \sqrt{3}x - \frac{3}{4} - x^2 = -x^2 + \sqrt{3}x - \frac{3}{4} = ax^2 + bx + c$ avec :
$a = -1\,; b = \sqrt{3}$ et $c = -\frac{3}{4}$.
Calcul du discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = \sqrt{3}^2 - 4 \times (-1) \times \left(-\frac{3}{4}\right) = 3 - 3 = 0$.
$\Delta = 0$, donc g admet donc une unique racine (double) x_0 :

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-\sqrt{3}}{-2} = \mathbf{\frac{\sqrt{3}}{2}}.$$

Et pour tout réel x, $g(x) = a\left(x - x_0\right)^2 = (-1)\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \mathbf{-\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$.

b. $a = -1 < 0$ donc g est négative ou nulle sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		$\frac{\sqrt{3}}{2}$		$+\infty$
Signe de $g(x)$		$-$	0	$-$	

3. $h(x) = x^2 + x + 1 = ax^2 + bx + c$ avec $a = 1\,; b = 1\,; c = 1$.
Calcul du discriminant : $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = 1 - 4 = -3$.
$\Delta < 0$, donc h n'admet pas de racine réelle et on ne peut pas factoriser $h(x)$.
$a = 1 > 0$, donc h est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		$+\infty$
Signe de $h(x)$		$+$	

5 CHOIX DE LA FORME APPROPRIÉE

1. Pour tout réel x :
$f(x) = x^2 - 4x - 12 = x^2 - 2 \times 2 \times x - 12 = x^2 - 2 \times 2 \times x + 2^2 - 2^2 - 12$.
Donc $f(x) = (x-2)^2 - 2^2 - 12 = \mathbf{(x-2)^2 - 16}$.

On pouvait aussi développer l'expression $(x-2)^2 - 16$ et démontrer qu'elle est égale à $f(x)$.

2. $f(x)=(x-2)^2-16$ (3e identité remarquable)

$=(x-2)^2-4^2$

$=(x-2-4)(x-2+4)=\mathbf{(x-6)(x+2)}$

3. a. On utilise la forme canonique :

$$f(x)=-16 \Leftrightarrow (x-2)^2-16=-16 \Leftrightarrow (x-2)^2=0 \Leftrightarrow x=2.$$

L'antécédent de –16 par *f* est 2.

b. On utilise la forme développée : $f(0)=0^2-4\times 0-12=\mathbf{-12}$.

c. On utilise la forme factorisée : $f(6)=(6-6)(6+2)=\mathbf{0}$.

d. On utilise la forme canonique : $f(2)=(2-2)^2-16=\mathbf{-16}$.

e. On utilise la forme développée :

$$f(x)=-12 \Leftrightarrow x^2-4x=0 \Leftrightarrow x(x-4)=0 \Leftrightarrow x=0 \quad \text{ou} \quad x=4.$$

Les antécédents de –12 par *f* sont 0 et 4.

f. On utilise la forme factorisée (produit nul):

$$f(x)=0 \Leftrightarrow (x-6)(x+2)=0 \Leftrightarrow x=6 \text{ ou } x=-2.$$

Les antécédents de 0 par *f* sont 6 et –2.

6 POLYNOMES DE RACINES DONNÉES

1. a. Les fonctions polynômes du second degré s'annulant en 5 et en $-\frac{1}{2}$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto a(x-5)\left(x+\frac{1}{2}\right)$, où a est une constante réelle non nulle.

b. L'image de 0 par une telle fonction vaut $a\times(0-5)\times\left(0+\frac{1}{2}\right)=-\frac{5}{2}a$.

Or $-\frac{5}{2}a=100 \Leftrightarrow a=100\times\left(-\frac{2}{5}\right)=-40$.

Il existe une unique fonction s'annulant en 5 et en $-\frac{1}{2}$, et telle que l'image de 0 soit égale à 100, c'est la fonction $\boldsymbol{x \mapsto -40(x-5)\left(x+\frac{1}{2}\right)}$.

2. La fonction g est de la forme $x \mapsto a\times x\times\left(x-\frac{7}{11}\right)$ avec $a\neq 0$.

$g(1)=\frac{4}{11} \Leftrightarrow a\times 1\times\left(1-\frac{7}{11}\right)=\frac{4}{11} \Leftrightarrow a\times\frac{4}{11}=\frac{4}{11} \Leftrightarrow a=1$.

Donc $\boldsymbol{g : x \mapsto x\left(x-\frac{7}{11}\right)}$.

7 MISE SOUS FORME CANONIQUE

a. $f(x)=x^2+4x+9$

$f(x)=x^2+2\times x\times 2+2^2-2^2+9$

$f(x)=(x^2+2\times 2\times x+2^2)-2^2+9=\mathbf{(x+2)^2+5}$.

b. $f(x)=x^2-6x$

$f(x)=(x^2-2\times x\times 3+3^2)-3^2$

$f(x)=\mathbf{(x-3)^2-9}$.

c. $f(x)=x^2+3x+1$

$$f(x)=\left(x^2+2\times x\times\frac{3}{2}+\left(\frac{3}{2}\right)^2\right)-\left(\frac{3}{2}\right)^2+1=\left(\boldsymbol{x}+\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\right)^{\mathbf{2}}-\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{4}}.$$

8 FACTORISATION

a. $f(x)=121x^2-110x+25=(11x)^2-2\times 11x\times 5+5^2=(11x-5)^2$.

Donc f admet une racine double : $+\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{11}}$.

b. $f(-2)=2(-2)^2-(-2)-10=8+2-10=0$ donc -2 est racine de f.

En notant x_2 l'autre racine et à l'aide de la formule sur le produit des racines :

$-2\times x_2=\frac{-10}{2}\Leftrightarrow x_2=\frac{5}{2}$. Et $\boldsymbol{f(x)=2(x+2)\left(x-\frac{5}{2}\right)}$.

c. $f(x)=9-x^2=(3-x)(3+x)=-(x-3)(x+3)$.

Donc f admet –3 et 3 pour racines.

d. $f(x)=x^2+x\sqrt{3}+\frac{3}{4}=x^2+2x\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$.

Donc f admet une racine double: $-\frac{\boldsymbol{\sqrt{3}}}{\mathbf{2}}$.

9 INÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ

a. $3x^2>2x+1\Leftrightarrow 3x^2-2x-1>0$.

On est donc ramené à l'étude du signe de $x\mapsto 3x^2-2x-1$.

$\Delta=(-2)^2-4\times 3\times(-1)=16>0$; donc la fonction polynôme $x\mapsto 3x^2-2x-1$ admet deux racines x_1 et x_2 :

$$x_1=\frac{2-4}{6}=-\frac{1}{3}\ \text{ et }\ x_2=\frac{2+4}{6}=1\,.$$

De plus, le coefficient de plus haut degré est $3>0$, donc :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
Signe de $3x^2-2x-1$		+	0	–	0	+	

Les inéquations $3x^2>2x+1$ et $3x^2-2x-1>0$ étant équivalentes, elles ont le même ensemble de solutions.

Donc l'inéquation $3x^2>2x+1$ a pour ensemble de solutions :

$$\left]-\infty;-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\right[\cup\,]\mathbf{1}\,;+\infty[.$$

Attention : $-\frac{1}{3}$ et 1 sont exclus car l'inégalité est stricte.

b. $x+3\leqslant -x^2\Leftrightarrow x^2+x+3\leqslant 0$

Étudions le signe de la fonction polynôme $x\mapsto x^2+x+3$:

$\Delta=1^2-4\times 1\times 3=-11<0$ et, comme $a=1>0$, pour tout x réel :

$$x^2+x+3>0\,.$$

Donc l'inéquation $\boldsymbol{x+3\leqslant -x^2}$ n'a aucune solution.

c. $x^2 \leqslant 6x - 1 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 1 \leqslant 0$.
Étudions le signe de la fonction polynôme $x \mapsto x^2 - 6x + 1$:
$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 32 > 0$; donc la fonction polynôme $x \mapsto x^2 - 6x + 1$ admet deux racines x_1 et x_2. Et puisque $\sqrt{32} = \sqrt{2 \times 16} = 4\sqrt{2}$, on a :

$$x_1 = \frac{6 - 4\sqrt{2}}{2} = 3 - 2\sqrt{2} \text{ et } x_2 = \frac{6 + 4\sqrt{2}}{2} = 3 + 2\sqrt{2}.$$

De plus, le coefficient de plus haut degré est $1 > 0$, donc :

x	$-\infty$		$3 - 2\sqrt{2}$		$1 + \sqrt{2}$		$+\infty$
Signe de $x^2 - 6x - 1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Les inéquations $x^2 \leqslant 6x - 1$ et $x^2 - 6x + 1 \leqslant 0$ étant équivalentes, elles ont le même ensemble de solutions.
Donc l'inéquation $x^2 \geqslant 6x + 1$ a pour ensemble de solutions $\left[3 - 2\sqrt{2} \,;\, 3 + 2\sqrt{2}\right]$.

10 CONTRAINTES AU RESTAURANT

a. $\Delta = 43^2 - 4 \times (-2) \times (-230) = 9$.
$\Delta > 0$, donc l'équation $-2x^2 + 43x - 230 = 0$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$:

$$\boldsymbol{x_1 = \frac{-43 - 3}{-4} = 11{,}5 \text{ et } x_2 = \frac{-43 + 3}{-4} = 10}.$$

b. • La surface totale vaut $43 \times x$ et est égale à la somme des aires des buffets $(2 \times x^2)$ et de l'aire de la pièce rectangulaire (230 m^2).
Soit x la largeur en mètres de la salle, cela donne :

$$43x = 2x^2 + 230 \Leftrightarrow -2x^2 + 43x - 230 = 0,$$

équation dont les solutions sont 10 et 11,5.
Donc les largeur possibles de la salle sont 10 m et $11{,}5 \text{ m}$.

• L'aire de l'espace attribué aux tables doit être supérieure ou égale à $50\ \%$ de l'aire totale, soit :

$$230 \geqslant \frac{50}{100} \times 43x \Leftrightarrow 230 \geqslant \frac{43}{2}x \Leftrightarrow \frac{460}{43} \geqslant x.$$

Or $\dfrac{460}{43} \approx 10{,}7$; **le restaurateur doit donc choisir une largeur de 10 m.**

11 ÉQUATION DU 3E DEGRÉ

a. $f(-1) = 2 \times (-1)^3 - 5 \times (-1)^2 - (-1) + 6 = -2 - 5 + 1 + 6 = 0$.
Donc –1 est racine de *f*.

b. Développons :
$(x + 1)\left(ax^2 + bx + c\right) = ax^3 + (a + b)x^2 + (b + c)x + c$.
Les polynômes $f(x)$ et $(x + 1)(ax^2 + bx + c)$ sont égaux si, et seulement si, leurs coefficients de même degré sont égaux soit si et seulement si :

$$\begin{cases} 2 = a \\ -5 = a + b \\ -1 = b + c \\ 6 = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -7 \\ c = 6 \\ 6 = c \end{cases}$$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (x + 1)(2x^2 - 7x + 6)$.

c. $\Delta = (-7)^2 - 4 \times 2 \times 6 = 1$.
Les racines de $x \mapsto 2x^2 - 7x + 6$ sont :

$$\boldsymbol{x_1 = \frac{7-1}{4} = \frac{3}{2}} \textbf{ et } \boldsymbol{x_2 = \frac{7+1}{4} = 2.}$$

d. $2x^2 - 7x + 6 = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)(x-2)$.

Donc, pour tout x réel, $f(x) = 2(x+1)(x-2)\left(x - \frac{3}{2}\right)$.

12 SYSTÈMES D'ÉQUATIONS

a. Le couple $(x_1 ; x_2)$ est solution du système $\begin{cases} x_1 + x_2 = -7 \\ x_1x_2 = 10 \end{cases}$

si, et seulement si, x_1 et x_2 sont des racines de la fonction polynôme $f : x \mapsto x^2 + 7x + 10$.

$\Delta = 7^2 - 4 \times 1 \times 10 = 9 = 3^2$, donc $\Delta > 0$ et la fonction polynôme f admet deux racines x_1 et x_2 :

$$x_1 = \frac{-7+3}{2} = -2 \text{ et } x_2 = \frac{-7-3}{2} = -5.$$

Les solutions du système sont donc $(-2 ; -5)$ et $(-5 ; -2)$.

b. Le couple $(x_1 ; x_2)$ est solution du système $\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{5}{12} \\ x_1x_2 = \dfrac{1}{24} \end{cases}$ si, et seulement si,

x_1 et x_2 sont des racines de la fonction polynôme $f : x \mapsto x^2 - \frac{5}{12}x + \frac{1}{24}$.

$\Delta = \left(-\frac{5}{12}\right)^2 - 4 \times 1 \times \frac{1}{24} = \frac{25}{144} - \frac{1}{6} = \frac{1}{144} = \left(\frac{1}{12}\right)^2 > 0$, donc f admet deux racines x_1 et x_2 :

$$x_1 = \frac{\frac{5}{12} + \frac{1}{12}}{2} = \frac{6}{12} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \text{ et } x_2 = \frac{\frac{5}{12} - \frac{1}{12}}{2} = \frac{4}{12} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

Les solutions du système sont donc $\left(\frac{1}{4} ; \frac{1}{6}\right)$ et $\left(\frac{1}{6} ; \frac{1}{4}\right)$.

c. Le couple $(x_1 ; x_2)$ est solution de $\begin{cases} x_1 + x_2 = -2 \\ x_1x_2 = 1 \end{cases}$ si, et seulement si, x_1 et x_2 sont des racines de la fonction polynôme $f : x \mapsto x^2 + 2x + 1$.
Or $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$ donc f admet une unique racine (double) : -1.
Le système admet une unique solution : le couple $(-1 ; -1)$.

d. Le couple $(x_1 ; x_2)$ est solution du système $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3\sqrt{3} \\ x_1x_2 = -12 \end{cases}$ si, et seulement si,

x_1 et x_2 sont des racines de la fonction polynôme $f : x \mapsto x^2 - 3\sqrt{3}x - 12$.
$\Delta = (-3\sqrt{3})^2 - 4 \times 1 \times (-12) = 27 + 48 = 75 = 3 \times 25 = (5\sqrt{3})^2$

Donc $\Delta > 0$ et f admet deux racines x_1 et x_2 :

$$x_1 = \frac{3\sqrt{3} + 5\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3} \text{ et } x_2 = \frac{3\sqrt{3} - 5\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}$$

Les solutions du système sont donc $(4\sqrt{3}\,;-\sqrt{3})$ et $(-\sqrt{3}\,;4\sqrt{3})$.

13 RACINES D'UN POLYNÔME EN PYTHON

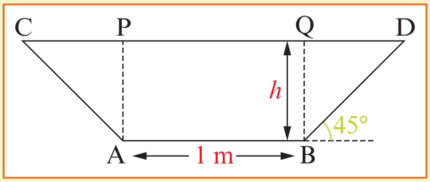
VARIABLES
a, *b*, *c*, Δ quatre réels
INITIALISATION
Entrer *a*, *b*, *c*
TRAITEMENT
Δ prend la valeur $b^2 - 4 \times a \times c$
DEBUT SI
Si $\Delta < 0$ alors afficher « pas de racine »
Sinon afficher « les racines sont », $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
FIN SI

En Python :

```
from math import *
def racines_2_degre(listeCoefficients) :
    # les coefficients du polynôme sont rentrés dans l'ordre des puissances
    # décroissantes soit [a,b,c]
    a=listeCoefficients[0]
    b=listeCoefficients[1]
    c=listeCoefficients[2]
    discriminant=b**2-4*a*c
    if a==0 :
        print('ce n''est pas un polynome du second degré')
     elif discriminant>0 :
        print(' Ce polynôme admet deux racines réelles x1 et x2')
         print('x1 =', (-b+sqrt(discriminant))/(2*a))
         print('x2=',(-b-sqrt(discriminant))/(2*a))
    elif discriminant==0 :
         print(' Ce polynôme admet une racine réelle double x0 =',-b/(2*a))
    else :
        print('Ce ploynôme n'' admet pas de racine réelle')
# Test avec une racine double
poly=[1,2,1]
racines_2_degre(poly)
# Test avec deux racines réelles
poly=[2,2,-1]
racines_2_degre(poly)
# Test sans racine réelle
poly=[2,2,1]
racines_2_degre(poly)
```

14 PROBLÈME CONCRET

1.



Notons P et Q les points d'intersection de (CD) avec les perpendiculaires à (AB) passant respectivement par A et B.

On a $\widehat{\mathrm{QBD}} = 90° - 45° = 45°$ et $\widehat{\mathrm{QDB}} = 45°$ (angles alternes-internes égaux).

Puisque $\begin{cases} \widehat{\mathrm{QBD}} = \widehat{\mathrm{BDQ}} = 45° \\ \widehat{\mathrm{BQD}} = 90° \end{cases}$, le triangle BQD est rectangle isocèle en Q.

Donc $QD = QB = h$, d'où $\mathrm{CP} = \mathrm{QD} = h$.

On rappelle que l'aire d'un trapèze $\mathscr{A}$ est donnée par la formule :

$$\mathscr{A} = \frac{(\text{petite base} + \text{grande base}) \times \text{hauteur}}{2}$$

Donc :

$$\mathscr{A} = \frac{(\mathrm{AB} + \mathrm{CD}) \times h}{2} = \frac{(1 + (1 + 2h)) \times h}{2} = \frac{(2 + 2h) \times h}{2} = \frac{2(1 + h)h}{2}.$$

Finalement, $\boldsymbol{\mathscr{A} = (1 + h)h = h + h^2}$**.**

2. Le volume est égal à l'aire du trapèze ABDC, multipliée par la longueur de l'abreuvoir :

$$\mathbf{V}(\boldsymbol{h}) = \boldsymbol{(h + h^2) \times 2 = 2h^2 + 2h}.$$

3.

Rappel : $1000 \text{ L} = 1 \text{ m}^3$.

$\mathrm{V}(h) = 1 \Leftrightarrow 2h^2 + 2h - 1 = 0$; le discriminant est : $\Delta = 2^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 12$.

$$\mathrm{V}(h) = 1 \Leftrightarrow \left(h = \frac{-2 + \sqrt{12}}{4} \quad \text{ou} \quad h = \frac{-2 - \sqrt{12}}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(h = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2} \quad \text{ou} \quad h = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2}\right) (\text{car } \sqrt{12} = 2\sqrt{3}).$$

$h > 0$, donc $h = \dfrac{\sqrt{3} - 1}{2} \approx 0{,}37$.

Donc l'abreuvoir doit avoir une hauteur d'environ 37 cm.

4. a. $2\,000 \text{ L} = 2 \text{ m}^3$, ainsi :

$$\mathrm{V}(h) \geqslant 2 \Leftrightarrow 2h^2 + 2h - 2 \geqslant 0$$
$$\Leftrightarrow h^2 + h - 1 \geqslant 0$$

$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 5$.

$\Delta > 0$, donc la fonction $h \mapsto h^2 + h - 1$ deux racines h_1 et h_2 :

$$h_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \text{ et } h_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Puisque $h_1 < 0 < h_2$, on obtient le tableau de signes (le coefficient du terme du second degré est 1 donc positif) :

x	$-\infty$		$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
Signe de $h^2 + h - 1$		+	0	–	0	+	

Comme $h > 0$, alors **il faut une hauteur supérieure ou égale à** $\boldsymbol{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$**.**

b. La hauteur de l'abreuvoir doit être supérieure ou égale à $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ mètre, soit **0,62 mètre** (valeur approchée à 10^{-2} par excès) **ou 62 cm**.

15 CHOIX DE LA FORME LA MIEUX ADAPTÉE

1. $f(x) = 3x^2 - 6x - 3 = 3(x^2 - 2x - 1)$

Or $x^2 - 2x - 1 = x^2 - 2 \times x \times 1 + 1^2 - 1^2 - 1$

$= (x-1)^2 - 2$

Donc $f(x) = 3\left[(x-1)^2 - 2\right] = 3(x-1)^2 - 6$

2. $f(x) = 3\left[(x-1)^2 - 2\right] = 3\left[(x-1)^2 - \sqrt{2}^2\right] = 3(x - 1 - \sqrt{2})(x - 1 + \sqrt{2})$

3. a. En utilisant la forme canonique :

$$f(x) = -6 \Leftrightarrow 3(x-1)^2 - 6 = -6 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1\,.$$

Donc – 6 admet un unique antécédent par *f* : 1.

b. En utilisant la forme factorisée :

$f(x) = 0 \Leftrightarrow (x - 1 - \sqrt{2})(x - 1 + \sqrt{2}) = 0$

$\Leftrightarrow x - 1 - \sqrt{2} = 0$ ou $x - 1 + \sqrt{2} = 0$

$\Leftrightarrow x = 1 + \sqrt{2}$ ou $x = 1 - \sqrt{2}$.

Les antécédents de 0 par *f* sont $\boldsymbol{1+\sqrt{2}}$ et $\boldsymbol{1-\sqrt{2}}$.

c. En utilisant la forme développée

$f(x) = -3 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 3 = -3 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0$

$\Leftrightarrow 3x(x-2) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 2$.

Les antécédent de –3 par *f* sont 0 et 2.

4. Puisque le terme de plus haut degré de *f* est 3 qui est positif, alors :

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
Signe de $f(x)$		+	0	–	0	+	

16 RÉSOLUTION D'(IN)ÉQUATIONS DANS $\mathbb{R}$

a. $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16$.

$\Delta > 0$, donc l'équation $x^2 - 2x - 3 = 0$ admet deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{2-4}{2} = -1 \text{ et } x_2 = \frac{2+4}{2} = 3\,.$$

Or $x_1 = -1 \notin \mathbb{R}^+$.

Dans $\mathbb{R}^+$, l'équation $\boldsymbol{x^2 - 2x - 3 = 0}$ admet une unique solution : 3.

b. $\Delta = 1^2 - 4 \times 3 \times (-1) = 13 > 0$.

Le trinôme $3x^2 + x - 1$ admet deux racines : $x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{13}}{6}$ et $x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{13}}{6}$.

x	$-\infty$		$\dfrac{-1-\sqrt{13}}{6}$		$\dfrac{-1+\sqrt{13}}{6}$		$+\infty$
Signe de $3x^2 + x - 1$		+	0	–	0	+	

Puisque $a = 3 > 0$.

Ici, 0 est compris entre $\dfrac{-1-\sqrt{13}}{6} < 0$ et $\dfrac{-1+\sqrt{13}}{6} > 0$.

• **Dans $\mathbb{R}^+$, l'inéquation $3x^2 + x - 1 < 0$ a pour ensemble de solutions l'intervalle $\left[0\,;\dfrac{-1+\sqrt{13}}{6}\right[$.**

• **Dans $\mathbb{R}^+$, l'inéquation $3x^2 + x - 1 \geqslant 0$ a pour ensemble de solutions l'intervalle $\left[\dfrac{-1+\sqrt{13}}{6};+\infty\right[$.**

17 SOMME ET PRODUIT DES RACINES EN PYTHON

1. Puisque $\Delta \geqslant 0$, f admet deux racines (éventuellement confondues) et :

$$s = -\frac{b}{a} \text{ et } p = \frac{c}{a}.$$

2., **3.** et **4.**

La correction des questions 2, 3 et 4 sont données par le code en Python ci-dessous ; on note cependant que pour déterminer la seconde racine, il vaut mieux utiliser la formule sur la somme que sur le produit des racines (car cette dernière ne permet pas de trouver la deuxième racine lorsque 0 est racine évidente : voir question 3.b)

```
from math import *

def autre_racine_2_degre(listeCoefficients,racine_evidente) :
    # les coefficients du polynôme sont rentrés dans l'ordre des puissances
     # décroissantes soit [a,b,c]
    a=listeCoefficients[0]
    b=listeCoefficients[1]
    c=listeCoefficients[2]
    discriminant=b**2-4*a*c
     if (a==0) or (discriminant<0):
          print('les conditions de l''exerice ne sont pas remplies')
 else :
        print(' La somme des racines vaut ',-b/a)
        print(' Le produit des racines vaut ',c/a)
        print('l'' autre racine vaut ',-b/a-racine_evidente )
```

```
# Question 3.a.
poly=[3,-1,-2]
autre_racine_2_degre(poly,1)
```

```
# Question 3.b
poly=[-2,6,0]
autre_racine_2_degre(poly,0)
```

18 NOMBRE D'OR

a. $\Phi^2 = \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \dfrac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} + \dfrac{2}{2} = \Phi + 1$.

Donc $\Phi^2 = \Phi + 1$ et en divisant cette égalité par $\Phi \neq 0$, on obtient :

$$\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi} \Leftrightarrow \Phi - 1 = \frac{1}{\Phi}.$$

b. $x^2 = x + 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$.

D'après **a.** Φ est solution de cette équation et en notant x_2 l'autre racine solution, $\Phi + x_2 = 1$, soit $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} + x_2 = 1$.

D'où $x_2 = 1 - \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = \dfrac{2-1-\sqrt{5}}{2} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

c. Le produit p des solutions de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$ vaut :

$$p = \frac{-1}{1} = -1.$$

De plus, $\Phi \times x_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \times \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = \dfrac{1^2 - \sqrt{5}^2}{4} = \dfrac{-4}{4} = -1 = p$.

d. $\Phi^2 = \Phi + 1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ donc

$g(x) = a\left(x - \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$ où a est un réel à déterminer.

Or $g(0) = a\left(-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(-\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right) = a \times \dfrac{8+4\sqrt{5}}{4} = a \times (2+\sqrt{5})$.

Alors : $g(0) = 1 \Leftrightarrow a(2+\sqrt{5}) = 1$.

Il reste à déterminer a. Il y a deux méthodes :

1re méthode :

Penser à la 3e identité remarquable et voir que $a = \sqrt{5} - 2$ convient.

2e méthode :

$$\begin{aligned} a(2+\sqrt{5}) = 1 &\Leftrightarrow a = \frac{1}{2+\sqrt{5}} \\ &\Leftrightarrow a = \frac{2-\sqrt{5}}{(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})} \\ &\Leftrightarrow a = \frac{2-\sqrt{5}}{4-5} \\ &\Leftrightarrow a = \sqrt{5} - 2. \end{aligned}$$

Donc $g(x) = (\sqrt{5}-2)(x-\phi)(x-\phi)$.

19 FORME CANONIQUE

1. $f(x) = 2x^2 - 12x + 5 = 2\left(x^2 - 6x + \frac{5}{2}\right) = 2\left(x^2 - 6x + 9 - 9 + \frac{5}{2}\right)$

Donc $f(x) = 2\left[(x-3)^2 - \frac{13}{2}\right] = 2\left(x - 3 - \sqrt{\frac{13}{2}}\right)\left(x - 3 + \sqrt{\frac{13}{2}}\right)$.

Finalement les racines de f sont $3 + \sqrt{\frac{13}{2}} = 3 + \sqrt{\frac{13}{2}} \times \sqrt{\frac{2}{2}} = \mathbf{\frac{6+\sqrt{26}}{2}}$ et $3 - \sqrt{\frac{13}{2}} = \mathbf{\frac{6-\sqrt{26}}{2}}$.

2. a. $f(x) = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right]$.

b. $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = x^2 + 2 \times x \times \frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}$

$$= \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}$$

c. $f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$

d. $f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\sqrt{\Delta}^2}{4a^2}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right]$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

$$f(x) = a\left(x - \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right).$$

20 PROBLÈME DE GÉOMÉTRIE

a. $\mathcal{B}(x)$ s'obtient en ajoutant l'aire du disque de diamètre $[AM]$, égale à $\pi \times \left(\frac{x}{2}\right)^2$, et l'aire du disque de diamètre $[MB]$, égale à $\pi \times \left(\frac{4-x}{2}\right)^2$.

(En effet, $AM + MB = AB$, soit $x + MB = 4$ et $MB = 4 - x$.)

$$\mathcal{B}(x) = \pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \pi\left(\frac{4-x}{2}\right)^2 = \pi\frac{x^2}{4} + \pi\frac{16 - 8x + x^2}{4} = \pi \times \frac{2x^2 - 8x + 16}{4}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{B}(x) = \pi\left(\frac{x^2}{2} - 2x + 4\right)}.$$

b. $\mathcal{A}(x)$ s'obtient en retranchant l'aire de la surface coloriée en vert, à l'aire du disque de diamètre $[AB]$.

Or, l'aire du disque de diamètre $[AB]$ vaut $\pi \times \left(\frac{4}{2}\right)^2 = 4\pi$.

Alors $\mathcal{A}(x) = 4\pi - \pi\left(\frac{x^2}{2} - 2x + 4\right) = \pi\left(4 - \frac{x^2}{2} + 2x - 4\right)$

Donc $\boldsymbol{\mathcal{A}(x) = \pi\left(-\frac{x^2}{2} + 2x\right)}$.

c. $\mathcal{A}(x) = \frac{1}{4} \times 4\pi \Leftrightarrow \pi\left(-\frac{x^2}{2} + 2x\right) = \pi$

$$\Leftrightarrow -\frac{x^2}{2} + 2x = 1$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 4x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2 - \sqrt{2} \text{ ou } x = 2 + \sqrt{2} \text{ car } \Delta = 8 = 2(\sqrt{2})^2$$

Ces deux valeurs appartiennent à l'intervalle $[0\,;4]$

Donc l'aire $\mathcal{A}(x)$ est égale au quart de l'aire du disque de diamètre $[AB]$ lorsque M est situé à une distance de A égale à $2 - \sqrt{2}$ ou à $2 + \sqrt{2}$.

d. $\mathcal{A}(x) \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{B}(x) \Leftrightarrow \pi\left(-\frac{x^2}{2} + 2x\right) \leqslant \frac{1}{2} \times \pi\left(\frac{x^2}{2} - 2x + 4\right)$

$$\Leftrightarrow -\frac{x^2}{2} + 2x \leqslant \frac{x^2}{4} - x + 2$$

$$\Leftrightarrow -3x^2 + 12x - 8 \leqslant 0.$$

Or $\Delta = 12^2 - 4 \times (-3)(-8) = 144 - 96 = 48 = (4\sqrt{3})^2$.

Donc $\mathcal{A}(x) \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{B}(x) \Leftrightarrow x \leqslant \frac{-12 + 4\sqrt{3}}{2(-3)}$ ou $x \geqslant \frac{-12 - 4\sqrt{3}}{2(-3)}$.

D'où $\mathcal{A}(x) \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{B}(x) \Leftrightarrow x \leqslant 2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ou $x \geqslant 2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}$

Or $2 - \frac{2\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}85$ et $2 + \frac{2\sqrt{3}}{3} \approx 3{,}15$: ces deux réels appartiennent à $[0\,;4]$.

Donc $\mathcal{A}(x)$ est inférieure ou égale à la moitié de $\mathcal{B}(x)$ lorsque $0 \leqslant AM \leqslant 2 - \frac{\sqrt{3}}{3}$ et lorsque $2 + \frac{2\sqrt{3}}{3} \leqslant AM \leqslant 4$.

21 ÉQUATION AVEC PARAMÈTRE

1. $f(x) = x^2 + \frac{b}{2}x + 6 = x^2 + 2 \times x \times \frac{b}{2} + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + 6$

$$= \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2 - 24}{4}.$$

2. $\Delta = b^2 - 4 \times 2 \times 3 = b^2 - 24$.

a. f admet une unique racine si, et seulement si, $\Delta = 0$.

$\Delta = 0 \Leftrightarrow b^2 - 24 = 0 \Leftrightarrow (b - 2\sqrt{6})(b + 2\sqrt{6}) = 0$ car $\sqrt{24} = 2\sqrt{6}$.

$\Leftrightarrow b = 2\sqrt{6}$ ou $b = -2\sqrt{6}$.

b. f admet deux racines distinctes si, et seulement si, $\Delta > 0$.

$\Delta > 0 \Leftrightarrow b^2 - 24 > 0 \Leftrightarrow b^2 > 24 \Leftrightarrow \boldsymbol{b < -2\sqrt{6}}$ ou $\boldsymbol{b > 2\sqrt{6}}$.

c. f n'admet pas de racine réelle si, et seulement si, $\Delta < 0$.

$\Delta < 0 \Leftrightarrow b^2 - 24 < 0 \Leftrightarrow b^2 < 24 \Leftrightarrow \boldsymbol{-2\sqrt{6} < b < 2\sqrt{6}}$.

Analyse

4 Nombre dérivé, fonction dérivée

I NOMBRE DÉRIVÉ

1. Nombre dérivé de *f* en *a*

DÉFINITION : Soient a un réel et f une fonction définie sur un intervalle I contenant a et non réduit à a. Soit h un nombre réel suffisamment petit pour que $f(a+h)$ existe.

On appelle **taux de variation** de f en a le quotient $\boxed{\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}}$

DÉFINITION : On dit que f **est dérivable en a** si la limite de $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ quand h tend vers 0 existe et est finie.
Dans ce cas, on note $f'(a)$ cette limite et on l'appelle **nombre dérivé de f en a.**

2. Interprétation graphique

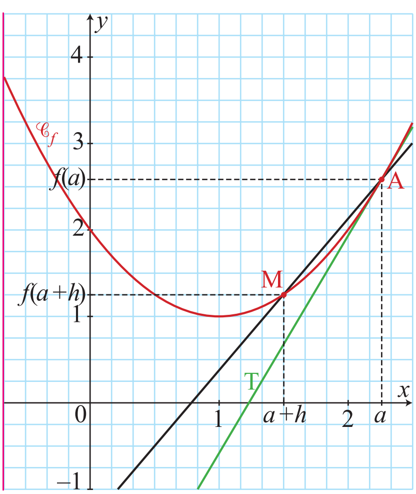
- Considérons, dans le plan muni d'un repère $(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,;\vec{j})$, la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f.

Soit $\mathrm{A}(a\,;f(a))$ un point de $\mathscr{C}_f$. Soit M un point de $\mathscr{C}_f$, autre que A.

Alors M a pour coordonnées $(a+h\,;f(a+h))$ avec $h \neq 0$.

Le **taux de variation** $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ représente le coefficient directeur de la droite (AM).

- Dire que $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tend vers $f'(a)$ quand h tend vers 0 signifie que le coefficient directeur de la sécante (AM) tend vers $f'(a)$.
Autrement dit, quand M tend vers A sur $\mathscr{C}_f$, la droite (AM) tend vers une position limite :
celle de la droite T passant par A et de coefficient directeur $f'(a)$.



II TANGENTE

1. Définition de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en un point

DÉFINITION :

Si f est dérivable en a, la droite passant par $A(a\,;f(a))$ et de coefficient directeur $f'(a)$ est appelée **tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A.**

2. Équation réduite de la tangente

PROPRIÉTÉ :

Soit f une fonction dérivable en a, alors l'équation réduite de la tangente au point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse a est :

$$\boxed{y = f(a) + f'(a) \times (x - a)}$$

III FONCTION DÉRIVÉE

1. Fonction dérivable sur un intervalle

DÉFINITION :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

On dit que f est **dérivable sur I** si f est dérivable en tout x de I.

On appelle alors **fonction dérivée** de f la fonction qui à tout nombre $x \in \mathrm{I}$ associe le nombre $f'(x)$, et on la note f' (se lit « f prime »).

2. Dérivée des fonctions usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	Intervalle de dérivation
$k (\in \mathbb{R})$	0	$\mathbb{R}$
$ax + b$	a	$\mathbb{R}$
x^2	$2x$	$\mathbb{R}$
x^3	$3x^2$	$\mathbb{R}$
$x^n\ (n \in \mathbb{N})$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$]-\infty\,;0[$ ou $]0\,;+\infty[$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0\,;+\infty[$

La formule $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$ se généralise sur $]-\infty\,;0[$ ou $]0\,;+\infty[$ lorsque $n < 0$.

Par exemple : $\left(\dfrac{1}{x^2}\right)' = \left(x^{-2}\right)' = -2x^{-2-1} = -2x^{-3} = -\dfrac{2}{x^3}$ sur $]-\infty;0[$ ou $]0\,;+\infty[$.

3. Dérivée et opérations

u, v et g sont des fonctions dérivables sur un intervalle I, a, b, $k \in \mathbb{R}$.

$f(x)$	$f'(x)$	Intervalle de dérivation
$k \times u$	$k \times u'$	I
$u + v$	$u' + v'$	I
$u \times v$	$u' \times v + u \times v'$	I
$\dfrac{1}{v}$	$\dfrac{-v'}{v^2}$	Tout intervalle de I où $v(x) \neq 0$
$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$	Tout intervalle de I où $v(x) \neq 0$
$g(ax+b)$	$a \times g'(ax+b)$	L'ensemble des réels x pour lesquels $ax + b$ est dans I

MÉTHODE 1

Étudier la dérivabilité en *a* d'une fonction *f*

➜ Voir les exos 2, 8, 16, 20 et 21.

Étape 1. On exprime en fonction de h uniquement le taux de variation $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ en le simplifiant au maximum.

Étape 2. On détermine si le taux de variation $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admet une limite finie L quand h tend vers 0.

Étape 3. Si c'est le cas, la fonction f est bien dérivable en a et $f'(a)=L$.

Exo résolu

La fonction $f : x \mapsto 2x^2$ est-elle dérivable en 3 ?

CORRIGÉ

Étape 1.

$$\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\frac{2\times(3+h)^2-2\times 3^2}{h}$$
$$=\frac{2\left(9+6h+h^2\right)-18}{h}$$
$$=\frac{12h+2h^2}{h}=\frac{h\times(12+2h)}{h}$$
$$=12+2h.$$

Étape 2. $\lim\limits_{h\to 0}(12+2h)=12.$

Étape 3. Cette fonction f est bien dérivable en 3 et $\boldsymbol{f'(3)=12}$.

On peut retrouver ce résultat à l'aide des théorèmes d'opération :
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynômiale, donc dérivable en $x=3$, et $f'(x)=2\times 2x=4x$ donc $f'(3)=4\times 3=12$.

MÉTHODE 2

Déterminer une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse *a*

➜ Voir les exos 3, 4, 5, 9 à 17, 19 et 22.

Étape 1. On place le point A d'abscisse a sur la courbe de f.

Étape 2. On détermine $f'(a)$.

Étape 3. À partir du point A, on trace le vecteur de coordonnées $(1\,;f'(a))$: c'est **un vecteur directeur** de la tangente cherchée.

Étape 4. On utilise la formule : $y=f(a)+f'(a)(x-a)$.

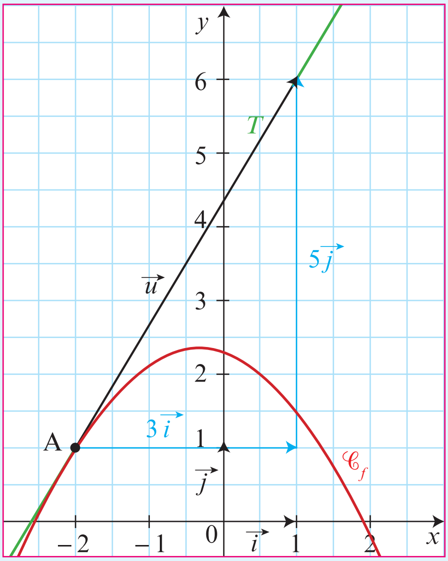
Exo résolu

On donne la courbe $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f dans le repère suivant.

On sait que f est dérivable en -2 et que $f'(-2) = \dfrac{5}{3}$.

Tracer la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -2 et en donner une équation réduite.

CORRIGÉ



Étape 1. On place le point A d'abscisse -2 sur la courbe.

Étape 2. On connait la valeur de $f'(-2)$: $f'(-2) = \dfrac{5}{3}$.

> Si cette valeur n'est pas donnée, on la détermine soit à l'aide du taux de variation (méthode 1) ou après avoir calculé la fonction dérivée f'.

Étape 3. Un vecteur directeur $\vec{v}$ de la tangente a pour coordonnées $\left(1\,;\,\dfrac{5}{3}\right)$ mais pour plus de précision on utilisera le vecteur colinéaire $\vec{u} = \overrightarrow{3v}$, soit $\vec{u}(3\,;\,5)$.

Étape 4. On applique la formule avec $a = -2$:

$$y = f(-2) + f'(-2)(x-(-2)) = f(-2) + f'(-2)(x+2).$$

Ici on lit la valeur de $f(-2)$: c'est l'ordonnée de A et donc $f(-2) = 1$.

On en déduit l'équation réduite : $y = 1 + \dfrac{5}{3}(x+2) = \mathbf{\dfrac{5}{3}x + \dfrac{13}{3}}$.

> Si la formule de f est connue, pour plus de précision la valeur $f(-2)$ sera calculée plutôt que lue graphiquement.

MÉTHODE 3

Dériver une fonction *f*

➜ Voir les exos 1, 5, 6, 7, 9 à 15, 17, 18, 19 et 22.

Étape 1. On identifie la forme de f : somme, produit, etc… de fonctions simples.

Étape 2. Si f est de la forme $u \times v$, $\frac{1}{v}$, $\frac{u}{v}$, $g(ax+b)$, on définit explicitement les fonctions u, v ou g et on calcule leurs dérivées.

Étape 3. On applique la formule issue du tableau du paragraphe 3 du cours.

Exo résolu

Calculer dans chaque cas la dérivée de la fonction sur l'intervalle donnée.

a. $f : x \mapsto \dfrac{3-2x}{7x^2+12}$ sur $\mathbb{R}$.

b. $h : x \mapsto \dfrac{-3}{2\sqrt{x}}$ sur $]0 ; +\infty[$.

CORRIGÉ

a. Étape 1. f est le quotient de deux polynômes dérivables sur $\mathbb{R}$, et son dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

Étape 2. f de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u(x) = 3-2x$ et $v(x) = 7x^2+12$.

Alors $u'(x) = 0 - 2 \times 1 = -2$ et $v'(x) = 7 \times 2x + 0 = 14x$.

Étape 3. Pour tout x réel :

$$f'(x) = \frac{(-2)\times\left(7x^2+12\right)-(3-2x)\times 14x}{\left(7x^2+12\right)^2} = \frac{14x^2-42x-24}{\left(7x^2+12\right)^2}.$$

b. Étape 1. h est de la forme $-\frac{3}{2} \times \frac{1}{v}$ avec $v(x) = \sqrt{x}$. v est dérivable et ne s'annule pas sur $]0 ; +\infty[$, h est donc dérivable sur $]0 ; +\infty[$.

Étape 2. $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Étape 3. Pour tout $x > 0$, $g'(x) = -\dfrac{3}{2} \times \dfrac{-v'(x)}{v^2(x)} = \dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{4x\sqrt{x}}}$.

TESTER SES CONNAISSANCES

1 TAUX DE VARIATION AVEC PYTHON | ★ | 15 min | ▸ P. 114

1. Compléter la fonction suivante qui calcule le taux de variation d'une fonction f en a :

```
def taux_var(f, a, h) :
return ...
```

2. a. Quel résultat s'affiche dans la console lorsqu'on applique cette fonction à f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - x + 3$, $a = 2$ et $h = 0{,}1$?

> Attention à la syntaxe en Python : *f* s'écrit lambda x : 3*x**2-x+3

b. Conjecturer la limite éventuelle du taux de variation de cette fonction f en $a = 2$ en prenant des valeurs de h de plus en plus petites.

c. Vérifier le résultat du **b.** en calculant $f'(2)$ avec les formules de dérivation.

> Voir la méthode 3.

2 TAUX DE VARIATION, DÉRIVABILITÉ | ★★ | 20 min | ▸ P. 114

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-1)^2$.

Soit h un réel non nul.

a. Calculer $\dfrac{f(1+h) - f(1)}{h}$ et simplifier son expression.

b. La fonction f est-elle dérivable en 1 ? Si oui, que vaut $f'(1)$?

> Voir la méthode 1.

2. Soit g la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(x) = \sqrt{x}$.

Soit h un réel strictement positif.

a. Calculer $\dfrac{g(h) - g(0)}{h}$ et simplifier son expression.

b. Que vaut ce taux de variation pour $h = 0{,}01$? Pour $h = 0{,}000\,1$?
Que peut-on conjecturer pour la dérivabilité de g en 0 ?

3. Soit k la fonction définie sur $\left]-\infty\,;-\dfrac{1}{2}\right[$ par $k(x) = \dfrac{1}{2x+1}$.

Soit h un réel non nul, proche de 0.

a. Montrer que $\dfrac{k(h) - k(0)}{h} = \dfrac{-2}{2h+1}$.

b. La fonction k est-elle dérivable en 0 ? Si oui, que vaut $k'(0)$?

3 DU NOMBRE DÉRIVÉ À LA TANGENTE | ★ | ⏱ 10 min | ▶ P. 115

Cette courbe représente une fonction polynôme f.

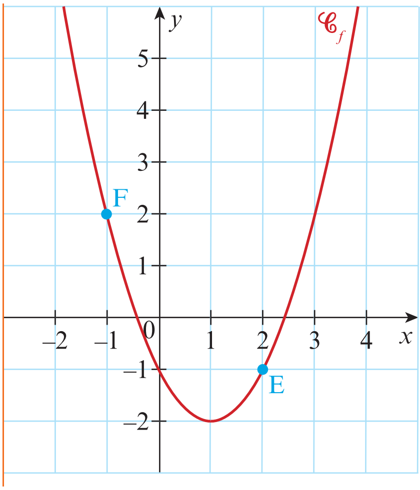
On précise que $f'(2) = 2$ et $f'(-1) = -4$.

a. Lire graphiquement $f(2)$ et $f(-1)$.

b. Tracer la tangente à la courbe au point E d'abscisse 2 et au point F d'abscisse -1.

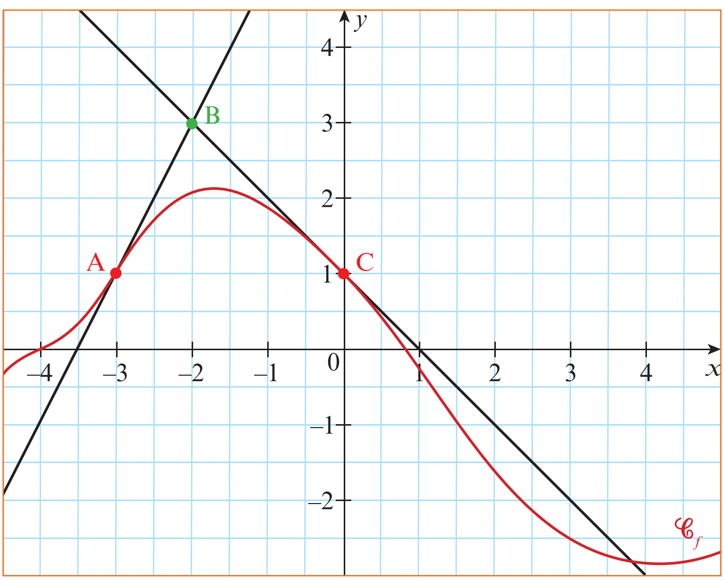
c. Déterminer une équation de ces tangentes.

Voir la méthode 2.



4 DE LA TANGENTE AU NOMBRE DÉRIVÉ… ET INVERSEMENT | ★ | ⏱ 10 min | ▶ P. 115

On a représenté une fonction f. Les points A$(-3\ ;\ 1)$ et C$(0\ ;\ 1)$ sont sur sa courbe représentative. Les deux droites tracées sont tangentes à la courbe de f. Le point B$(-2\ ;\ 3)$ est le point d'intersection de ces tangentes.



À l'aide du graphique :

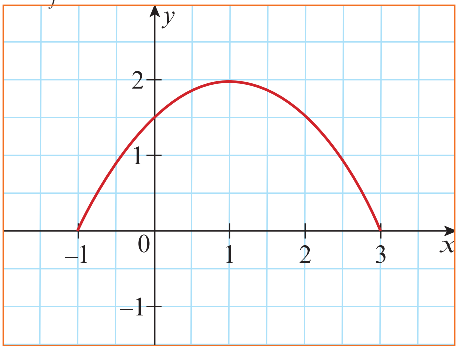
a. Calculer $f'(-3)$ et $f'(0)$.

b. Déterminer les valeurs de x pour lesquelles $f'(x) = 0$.

5 ÉQUATIONS DE TANGENTES

★ | 15 min | ▸ P. 116

Soit f la fonction définie sur [−1 ; 3] par $f(x) = -0,5x^2 + x + 1,5$.
On donne sa courbe $\mathscr{C}_f$.



1. On cherche une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse 2.
a. Placer A sur le graphique.
b. Calculer la fonction dérivée de f sur [−1 ; 3].
En déduire la valeur de $f'(2)$.
c. Tracer la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A.
d. Déterminer une équation de cette tangente.

Voir la méthode 2.

2. Tracer la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point M d'abscisse −1.
En déterminer une équation.
3. Tracer la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point N d'abscisse 1.
En déterminer une équation.

6 CALCULS DE DÉRIVÉES

★★ | 35 min | ▸ P. 117

Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer $f'(x)$, pour tout $x \in \mathrm{I}$:

a. $f(x) = 3 - \dfrac{7x}{2}$; $\mathrm{I} = \mathbb{R}$.

b. $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$; $\mathrm{I} = \mathbb{R}$.

c. $f(x) = -\dfrac{2}{x}$; $\mathrm{I} =]-\infty\,;0[$.

d. $f(x) = x^3 - \sqrt{x}$; $\mathrm{I} =]0\,;+\infty[$.

e. $f(x) = \sqrt{3x-6}$; $\mathrm{I} =]2\,;+\infty[$.

f. $f(x) = \dfrac{2x-1}{4x^2+1}$; $\mathrm{I} = \mathbb{R}$.

g. $f(x) = x\sqrt{x}$; $\mathrm{I} =]0\,;+\infty[$.

h. $f(x) = \dfrac{7}{(2x-1)^2}$; $\mathrm{I} = \left]\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$.

i. $f(x) = (x + \sqrt{x})^3$; $\mathrm{I} =]0\,;+\infty[$.

Se rappeler que $a^3 = a^2a$. Voir la méthode 3.

S'ENTRAÎNER

7 COÛT MARGINAL | ★★ | 20 min | ▸ P. 118

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0{,}005x^2 + 0{,}15x + 1$.

On suppose que $f(x)$ représente le coût, en euros, de production de x objets.

Le coût de production d'un objet supplémentaire s'appelle le « coût marginal » et se note $f_m(x)$.

Ainsi $f_m(x) = f(x+1) - f(x)$.

a. Écrire un script en langage Python d'une fonction **f_m** de paramètres f et x qui renvoie le coût marginal $f_m(x)$.

> Voir le chapitre 1.

b. Calculer dans la console le coût marginal pour $x = 1\,000$ et le comparer avec $f'(1\,000)$.

8 NOMBRE DÉRIVÉ | ★★ | 20 min | ▸ P. 119

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{2}\right\}$ par $f(x) = \dfrac{4}{2x+3}$.

Soit h un réel non nul, proche de zéro.

a. Montrer que $\dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = \dfrac{-8}{5(5+2h)}$.

b. La fonction f est-elle dérivable en 1 ? Si oui, que vaut $f'(1)$?

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \sqrt{x^2+1}$.

Soit h un réel non nul proche de 0.

a. Montrer que :

$$\frac{g(0+h) - g(0)}{h} = \frac{h}{\sqrt{h^2+1}+1}.$$

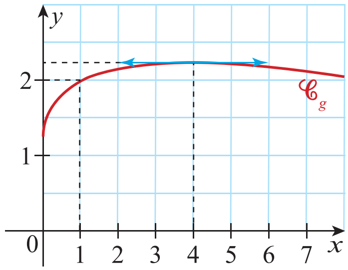
> Multiplier numérateur et dénominateur par $\sqrt{h^2+1}+1$ qu'on appelle l'« expression conjuguée » de $\sqrt{h^2+1}-1$.

b. En déduire que g est dérivable en 0 et donner la valeur du nombre dérivé de g en 0.

9 UNE FONCTION INCONNUE

★★ | 25 min | ▸ P. 119

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^+$ par $g(x) = ax + b + \sqrt{x}$, où a et b sont deux réels. On donne ci-contre la courbe représentative $\mathscr{C}_g$ de la fonction g.



a. Parmi les valeurs de $g(1)$, $g'(1)$, $g(4)$, $g'(4)$, quelles sont celles que l'on peut lire précisément sur le graphique ?
Donner leurs valeurs.

b. Montrer que l'on obtient un système de deux équations d'inconnues a et b, équivalent au système $\begin{cases} 4a+1=0 \\ a+b=1. \end{cases}$

Exprimez les deux égalités trouvées en **1**. en fonction de *a* et de *b* pour obtenir le système.

c. Déterminer alors les valeurs de a et b et donner l'expression de $g(x)$ en fonction de x. Donner ensuite les expressions de g et de g' en fonction de x.

10 APPLICATIONS AUX SCIENCES PHYSIQUES

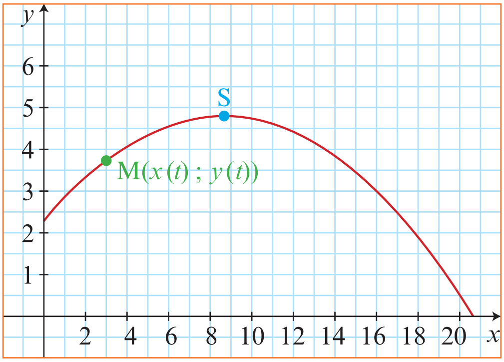
★ | 30 min | ▸ P. 120

Cet exercice fait suite à *l'exercice 24* du *chapitre* « *Second degré* »

Un athlète lance un poids dont on a représenté la trajectoire dans le repère ci-dessous.

La position du poids à l'instant t, exprimé en secondes, est donnée par ses coordonnées $(x(t)\,;\,y(t))$, où $\begin{cases} x(t) = 7\sqrt{3}t \\ y(t) = -4{,}9t^2 + 7t + 2{,}3 \end{cases}$

On considère que $t = 0$ à l'instant où le poids est lancé.



On admettra ici les résultats suivants, démontrés dans l'exercice 24 du chapitre 2 :

- L'abscisse du sommet S est $x_S = 5\sqrt{3}$ ($\approx 8{,}66$ mètres).

- Le poids touche le sol à une distance $x_F = 12 + 5\sqrt{3}$ ($\approx 20{,}66$ mètres).

On note t_F l'instant où le poids touche le sol.

1. La vitesse instantanée du poids à l'instant t est donnée par le vecteur vitesse $\vec{v}(t)$ de coordonnées $(x'(t)\,;\,y'(t))$.
Exprimer, pour tout $t \in [0\,;\,t_F]$, $x'(t)$ et $y'(t)$ en fonction de t.

2. Déterminer à quel instant t_S le poids atteint le sommet de la parabole. En déduire les coordonnées du vecteur vitesse $\vec{v}(t_S)$.

3. a. Montrer que $t_F = \dfrac{5+4\sqrt{3}}{7}$.

b. En déduire les coordonnées du vecteur vitesse $\vec{v}(t_F)$.

c. Pour répondre à la question : « avec quelle vitesse le poids touche-t-il le sol ? », calculer la norme du vecteur $\vec{v}(t_F)$.

11 INTERPRÉTATION GRAPHIQUE | ★★ | 10 min | ▶ P. 120

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + ax + b$, où a et b sont des constantes réelles.
On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.
Déterminer l'expression de $f(x)$ sachant que $P(-2\,;5) \in \mathscr{C}_f$, et que la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1 a pour coefficient directeur $-\dfrac{2}{3}$.

Voir la méthode 2 et l'exercice 9.

12 TANGENTE DE COEFFICIENT DIRECTEUR DONNÉ | ★★ | 25 min | ▶ P. 121

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{2x^3}{3} + 2x^2 - 6x + 1$,
et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

a. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x.

b. Déterminer l'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.

c. Déterminer les points de la courbe en lesquels $\mathscr{C}_f$ admet une tangente horizontale.

Quel est le coefficient directeur d'une droite horizontale ?
Il faut avoir traité le chapitre 3 pour répondre aux questions 3 et 4.

d. Déterminer les points de la courbe en lesquels $\mathscr{C}_f$ admet une tangente parallèle à la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$.

13 TANGENTES PASSANT PAR UN POINT DONNÉ

★★ | 25 min | ▶ P. 121

La courbe ci-contre est celle de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 + 2x - 6.$$

1. Calculer $f'(x)$.

2. Déterminer une équation de T_{-2} la tangente à la courbe de f au point d'abscisse -2 et tracer cette tangente.

Voir la méthode 2.

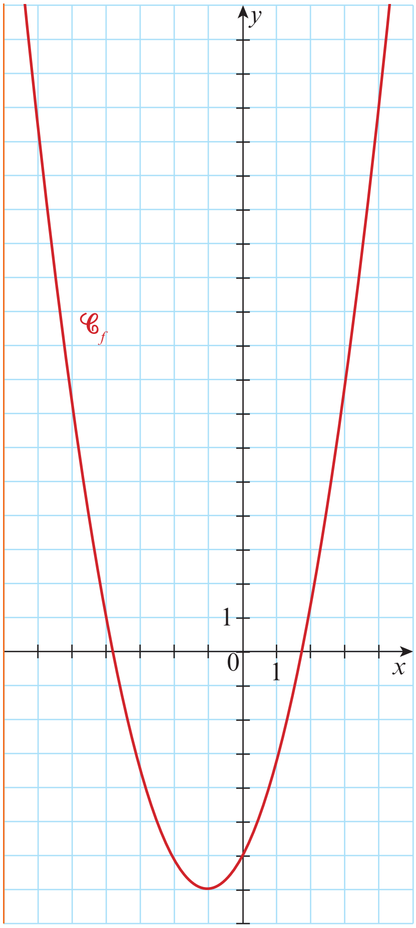
3. Existe-t-il des points de la courbe de f en lesquels la tangente est parallèle à la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = -4x$?

4. On cherche à déterminer s'il existe des points de la courbe de f en lesquels la tangente passe par le point M(2 ; −2).

a. Tracer toutes les droites qui vous semblent convenir.

b. Justifier votre conjecture, c'est-à-dire déterminer les différentes valeurs de a pour lesquelles la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a passe par le point M.

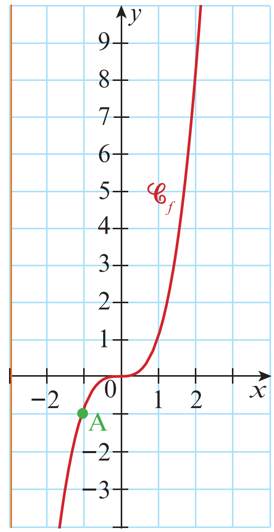
On sera amené à résoudre une équation du second degré : voir le chapitre 3.



14 POSITIONS RELATIVE COURBE/TANGENTE | ★★ | ⏱ 15 min | ▶ P. 122

On a tracé la courbe $\mathscr{C}_f$ représentant la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$ et placé le point A d'abscisse -1 sur cette courbe.

1. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ passant par A et tracer T.



> Voir la méthode 2.

2. a. Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$x^3 - 3x - 2 = (x+1)(x^2 - x - 2).$$

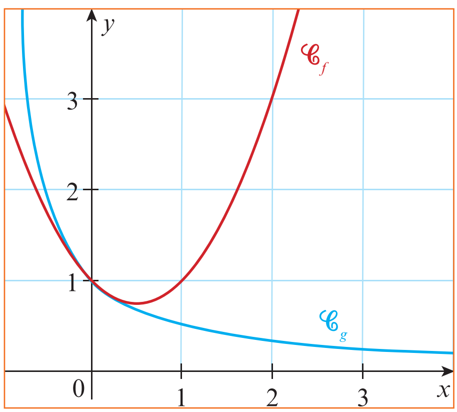
> Développez le membre de droite.

b. Dresser le tableau de signes de $x^3 - 3x - 2$.

> Il faut avoir traité le chapitre 3 sur le second degré

c. En déduire la position relative de $\mathscr{C}_f$ et de T.

15 TANGENTE COMMUNE À DEUX COURBES | ★★ | ⏱ 15 min | ▶ P. 123



On considère les fonctions f et g définies sur $]-1\,;+\infty[$ par :
$$f(x) = x^2 - x + 1 \text{ et } g(x) = \frac{1}{x+1}.$$

a. Justifier que g est dérivable sur $]-1\,;+\infty[$ et calculer $g'(x)$ pour $x \in\,]-1\,;+\infty[$.

b. Justifier que les courbes de f et g sont sécantes en leur point d'abscisse 0.

c. Les courbes de f et g ont-elles la même tangente en ce point ? Justifier.

> Voir la méthode 2.

PRÉPARER UN CONTRÔLE

16 NOMBRE DÉRIVÉ

★★ | 20 min | ▸ P. 124

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 5$.

a. Soit h un réel non nul proche de 0.
Calculer le taux d'accroissement de f entre 2 et $2 + h$.

b. En déduire que f est bien dérivable en 2 et préciser la valeur du nombre dérivé $f'(2)$.

Voir la méthode 1.

2. Si a est un nombre réel, démontrer que la fonction $g : x \mapsto x^2$ est dérivable en a à l'aide du taux de variation, puis donner l'expression de $g'(a)$.

17 TANGENTES

★ | 15 min | ▸ P. 124

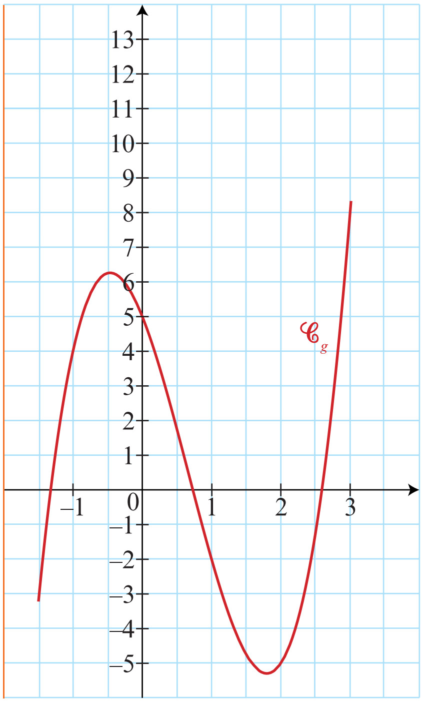
On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction g définie sur $[-1{,}5\ ;\ 3]$ par :

$$g(x) = 2x^3 - 4x^2 - 5x + 5.$$

a. Placer sur la courbe de g les points A, B et C d'abscisses respectives -1, 0 et 2.

b. Pour chacun de ces points, déterminer le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_g$, puis tracer ces tangentes.

c. Déterminer une équation de chacune de ces tangentes.



Voir la méthode 1.

18 CALCULS DE DÉRIVÉES

★★ | 15 min | ▶ P. 125

Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer $f'(x)$, pour tout $x \in \mathrm{I}$:

a. $f(x) = \dfrac{3x}{7} - \dfrac{3}{7x}$; $\quad \mathrm{I} =]-\infty\,;0[$.

b. $f(x) = (2x-3)^4$; $\quad \mathrm{I} = \mathbb{R}$.

c. $f(x) = \dfrac{2-x}{3x+1}$; $\quad \mathrm{I} = \left]-\dfrac{1}{3};+\infty\right[$.

Voir la méthode 3.

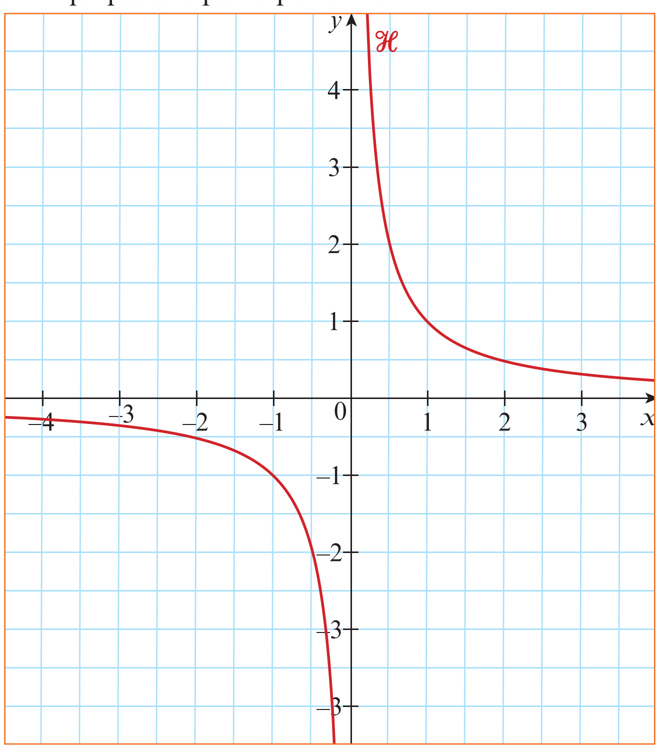
19 TANGENTES À UNE HYPERBOLE

★★ | 35 min | ▶ P. 126

La courbe $\mathscr{H}$ représente la fonction inverse, définie sur $]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$

On considère le point M$(-1\,;1)$ et on cherche à déterminer s'il existe des tangentes à $\mathscr{H}$ qui passent par le point M.



1. Placer M et tracer toutes les droites passant par M qui semblent tangentes à la courbe $\mathscr{H}$.

2. Soit A un point de $\mathscr{H}$. Notons a son abscisse.

a. Démontrer qu'une équation de la tangente à $\mathcal{H}$ au point A est :

$$y = -\frac{1}{a^2}x + \frac{2}{a}.$$

b. En déduire que la tangente en A à $\mathcal{H}$ passe par M si, et seulement si, a vérifie $a^2 - 2a - 1 = 0$.

c. Résoudre cette équation, puis conclure sur le nombre de droites tangentes à $\mathcal{H}$ passant par M, et en donner les équations.

Voir la méthode 2 et le chapitre 3 sur le second degré.

ALLER PLUS LOIN

20 FONCTION VALEUR ABSOLUE | ★★ | 10 min | ▶ P. 127

Soit f la fonction valeur absolue, définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geqslant 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}.$$

Soit h un réel non nul, proche de zéro.

a. Calculer le quotient $\dfrac{f(0+h) - f(0)}{h}$, en distinguant les cas $h > 0$ et $h < 0$.

b. En déduire que la fonction f n'est pas dérivable en 0.

21 DÉMONTRONS LES FORMULES | ★★★ | 20 min | ▶ P. 128

L'objet de cet exercice est d'établir les formules de la dérivée d'un produit, et de la dérivée d'un quotient.

1. Soient f et g deux fonctions dérivables en a.
Soit h un réel non nul, proche de 0 (de sorte que f et g soient définies en $a + h$).

a. Vérifier que :

$$\frac{f(a+h) \times g(a+h) - f(a) \times g(a)}{h}$$
$$= \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \times g(a+h) + f(a) \times \frac{g(a+h) - g(a)}{h}.$$

Réduire le membre de droite au même dénominateur.

b. En admettant que $\lim\limits_{h \to 0} g(a+h) = g(a)$, montrer que $(f \times g)$ est dérivable en a et donner l'expression de $(f \times g)'(a)$.

2. Soient f et g deux fonctions dérivables en a, et supposons $g(a) \neq 0$.
Soit h un réel non nul, proche de 0 (de sorte que f et g soient définies en $a+h$ et que $g(a+h) \neq 0$).

a. Vérifier que :

$$\frac{\dfrac{f(a+h)}{g(a+h)} - \dfrac{f(a)}{g(a)}}{h}$$

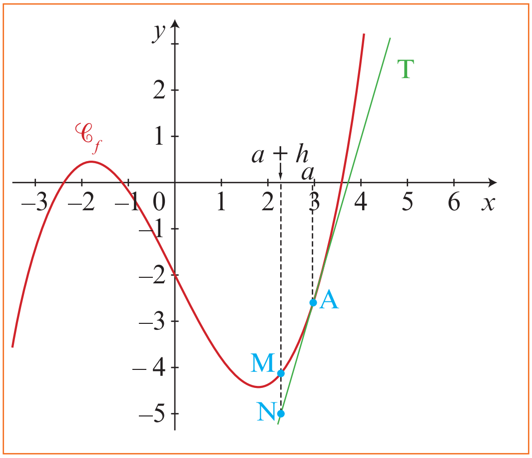
$$= \frac{1}{g(a) \times g(a+h)} \times \left[\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \times g(a) - f(a) \times \frac{g(a+h) - g(a)}{h} \right].$$

b. Justifier que $\left(\dfrac{f}{g}\right)$ est dérivable en a et donner l'expression de $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a)$.

22 APPROXIMATION AFFINE ★★ | 35 min | ▸ P. 129

Partie A.

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I contenant a et non réduit à a.
On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan.



1. Rappeler l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse a.
On notera T cette tangente.

2. Soit h un réel non nul proche de zéro, tel que $a+h \in \mathrm{I}$.
On note M le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse $a+h$ et N le point de T d'abscisse $a+h$.
Exprimer, en fonction de a et de h, les coordonnées de M et de N ainsi que la distance MN.

3. Justifier l'approximation, appelée « approximation affine » :

si h est proche de zéro, alors $f(a+h) \approx f(a) + hf'(a)$.

Partie B. Application

1. Notons f la fonction racine carrée.

a. Donner la valeur de $f(1)$ et de $f'(1)$.

b. Établir l'approximation affine de $\sqrt{1+h}$ pour h proche de zéro.

c. En déduire, sans utiliser de calculatrice, une valeur approchée de $\sqrt{1{,}001}$.

2. Établir l'approximation affine de $\dfrac{1}{2+h}$ pour h proche de 0.

En déduire, sans utiliser de calculatrice, une valeur approchée de $\dfrac{1}{1{,}98}$.

CORRIGÉS

CORRIGÉS

1 TAUX DE VARIATION AVEC PYTHON

1. On complète le script ainsi :

```
def taux_var(f, a, h) :
    return (f(a+h)-f(a))/h
```

2. a. Dans la console on écrit taux_var(lambda x : 3*x**2-x+3,2,0.1)
On obtient l'affichage : **11.300000000000008.**

b. En prenant $h = 0,01$ on obtient 11.029999999999696.
Pour $h = 0,001$ on obtient 11.000300000034713.
On conjecture que le taux de variation tend vers 11 quand h tend vers 0.

c. La fonction f est polynomiale donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$f'(x) = 3 \times 2x - 1 = 6x - 1$ donc $\boldsymbol{f'(2)} = 6 \times 2 - 1 = \mathbf{11}$.

2 TAUX DE VARIATION, DÉRIVABILITÉ

1. a. $\dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = \dfrac{h^2 - 0}{h} = h.$

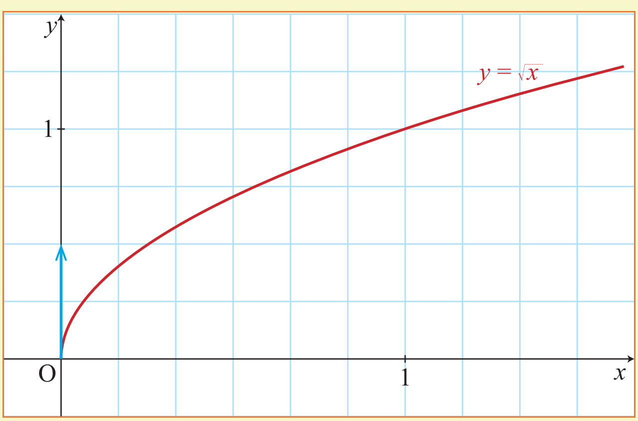
b. $\lim\limits_{h \to 0} h = 0$ donc $\boldsymbol{f}$ **est dérivable en 1 et** $\boldsymbol{f'(1) = 0}$.

2. a. $\dfrac{g(h) - g(0)}{h} = \dfrac{\sqrt{h} - 0}{h} = \dfrac{1}{\sqrt{h}}.$

b. Pour $h = 0{,}01$: $\dfrac{1}{\sqrt{0,01}} = 10$. Pour $h = 0{,}000\,1$: $\dfrac{1}{\sqrt{0,000\,1}} = 100$.

On peut conjecturer que le taux de variation n'admet pas une limite finie quand h tend vers 0, donc que $\boldsymbol{g}$ **n'est pas dérivable en 0**.

On aurait pu utiliser le script de l'exercice 1 pour effectuer ces calculs.
La fonction racine carrée est bien définie en 0 mais n'est pas dérivable en 0. Sa courbe admet une tangente verticale en son point d'abscisse 0.

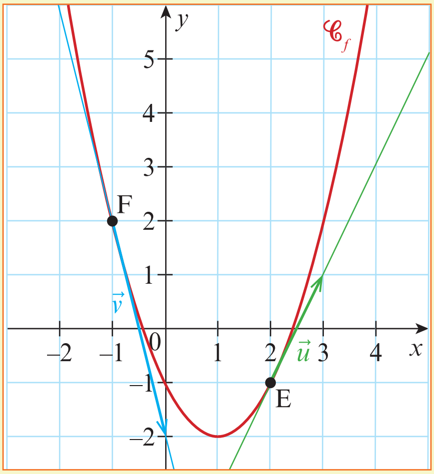


3. Soit h un réel non nul, proche de 0 :

a. $$\frac{k(h)-k(0)}{h}=\frac{\frac{1}{2h+1}-1}{h}=\frac{\frac{1-2h-1}{2h+1}}{h}$$
$$=\frac{-2h}{h\times(2h+1)}=\frac{-2}{2h+1}.$$

b. $\lim\limits_{h\to 0} 2h+1=1$ d'où $\lim\limits_{h\to 0}\frac{-2}{2h+1}=-2$ donc **k est dérivable en 0 et $k'(0)=-2$.**

3 DU NOMBRE DÉRIVÉ À LA TANGENTE



a. Les coordonnées de E sont (2 ; –1), donc $f(2)=-1$.
Les coordonnées de F sont (-1 ; 2), donc $f(-1)=2$.

b. La tangente à la courbe au point E a pour coefficient directeur $f'(2)=2$ donc **elle passe par E et a pour vecteur directeur $\vec{u}$(1 ; 2)**.

La tangente à la courbe au point F a pour coefficient directeur $f'(-1)=-4$ donc elle **passe par F et a pour vecteur directeur $\vec{v}$(1 ; –4)**.

c. L'équation réduite de la tangente à la courbe au point E est :
$$y=f(2)+f'(2)(x-2)=-1+2(x-2)=\mathbf{2x-5}.$$
L'équation réduite de la tangente à la courbe au point F est :
$$y=f(-1)+f'(-1)(x-(-1))=2-4(x+1)=\mathbf{-4x-2}.$$

4 DE LA TANGENTE AU NOMBRE DÉRIVÉ … ET INVERSEMENT

a. $f'(-3)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point A. On cherche donc le coefficient directeur de la droite (AB).

Donc $f'(-3)=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{3-1}{-2-(-3)}=2$.

De même $f'(0)$ est le coefficient directeur de la droite (BC) donc $\mathbf{f'(0)=-1}$.

b. Les valeurs de x pour lesquelles $f'(x)=0$ sont les abscisses des points où la courbe possède une tangente horizontale.
Graphiquement, on lit : $\mathbf{x\approx -1{,}7}$ **ou** $\mathbf{x\approx 4{,}3}$.

5 ÉQUATIONS DE TANGENTES

1. a. L'abscisse de A est 2 donc son ordonnée est : $f(2) = -0{,}5 \times 2^2 + 2 + 1{,}5 = 1{,}5$.

b. $\boldsymbol{f'(x)} = -0{,}5 \times 2x + 1 + 0 = -x + 1$. Donc $\boldsymbol{f'(2)} = -2 + 1 = \mathbf{-1}$.

c. La tangente cherchée passe par A et a pour vecteur directeur $\vec{u}$ **(1 ; – 1)**.

d. L'équation réduite de cette tangente est :

$$y = f(2) + f'(2)(x-2) = 1{,}5 + (-1)(x-2) = \boldsymbol{-x + 3{,}5}.$$

2. L'ordonnée de M est $f(-1) = -0{,}5 \times (-1)^2 - 1 + 1{,}5 = 0$.

$f'(x) = -x + 1$ donc $f'(-1) = -(-1) + 1 = 2$.

La tangente cherchée passe par M et a pour vecteur directeur $\vec{v}$ **(1 ; 2)**.

Son équation réduite est :

$$y = f(-1) + f'(-1)(x-(-1)) = 0 + 2(x+1) = \boldsymbol{2x + 2}.$$

3. L'ordonnée de N est $f(1) = -0{,}5 \times (1)^2 + 1 + 1{,}5 = 2$.

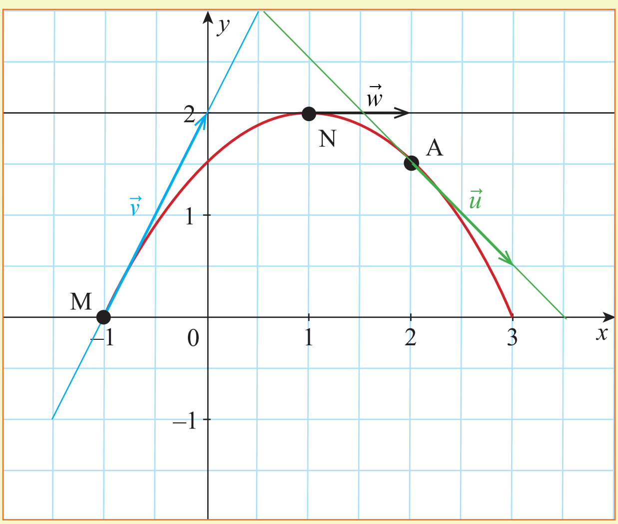
$f'(x) = -x + 1$ donc $f'(1) = -1 + 1 = 0$.

La tangente cherchée passe par N et a pour vecteur directeur $\vec{w}$ **(1 ; 0)**.

Son équation réduite est :

$$y = f(1) + f'(1)(x-1) = 2 + 0(x-1) = \mathbf{2}.$$

La tangente est horizontale au point N qui correspond au maximum pour la fonction f sur [–1 ; 3].



6 CALCULS DE DÉRIVÉES (1)

a. Pour tout x réel, $f(x) = 3 - \dfrac{7x}{2} = 3 - \dfrac{7}{2}x$, donc

$$f'(x) = 0 - \frac{7}{2} \times 1 = -\mathbf{\frac{7}{2}}.$$

b. Pour tout x réel, $f'(x) = 2 \times 2x - 3 \times 1 + 0 = \mathbf{4x - 3}$.

c. Pour tout $x < 0$, $f(x) = -2 \times \dfrac{1}{x}$ donc $f'(x) = -2 \times \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = \mathbf{\dfrac{2}{x^2}}$.

d. Pour tout $x > 0$, $f'(x) = \mathbf{3x^2 - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}}$.

e. f est de la forme $g(ax + b)$ avec $g(x) = \sqrt{x}$, $a = 3$, $b = -6$.

g est dérivable sur $]0\,;+\infty[$; or pour $x \in\ ]2\,;+\infty[$, $x > 2$ donc $3x > 6$ c'est-à-dire $3x - 6 > 0$.

Donc f est dérivable sur $]2\,;+\infty[$, et pour tout $x > 2$ on a :

$$f'(x) = a \times g'(ax + b) = 3 \times \left(\frac{1}{2\sqrt{3x - 6}}\right) = \mathbf{\frac{3}{2\sqrt{3x - 6}}}.$$

f. f est le quotient de deux polynômes dérivables sur $\mathbb{R}$ et son dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$f = \dfrac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$ avec $u(x) = 2x - 1$ et $v(x) = 4x^2 + 1$.

Or $u'(x) = 2$ et $v'(x) = 4 \times 2x = 8x$.

Donc, pour tout x réel,

$$f'(x) = \frac{2(4x^2 + 1) - (2x - 1) \times 8x}{(4x^2 + 1)^2}$$

soit : $f'(x) = \dfrac{8x^2 + 2 - 16x^2 + 8x}{(4x^2 + 1)^2} = \mathbf{\dfrac{-8x^2 + 8x + 2}{(4x^2 + 1)^2}}$.

g. f est de la forme $u \times v$ avec $u(x) = x$ et $v(x) = \sqrt{x}$ dérivables sur $]0\,;+\infty[$, donc f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et $f' = u' \times v + u \times v'$.

Or $u'(x) = 1$ et $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ donc, pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = 1 \times \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2} = \mathbf{\frac{3}{2}\sqrt{x}}.$$

h. f est de la forme $7 \times \dfrac{1}{v}$ avec $v(x) = (2x - 1)^2 = 4x^2 - 4x + 1$ dérivable et qui ne s'annule pas sur $\left]\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$.

Donc f est dérivable sur $\left]\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$ et $f' = 7 \times \dfrac{-v'}{v^2}$.

Or $v'(x) = 8x - 4$ donc, pour tout $x > \frac{1}{2}$:

$$f'(x) = 7 \times \frac{-(8x-4)}{(2x-1)^4} = -28 \times \frac{(2x-1)}{(2x-1)^4}, \text{ soit : } \boldsymbol{f'(x) = \frac{-28}{(2x-1)^3}}.$$

Autre méthode pour le calcul de v' :

$v(x) = g(ax+b)$ avec $g(x) = x^2$, $a = 2$ et $b = -1$.

Or $g'(x) = 2x$ donc $v'(x) = a \times g'(ax+b) = 2 \times 2(2x-1) = 8x - 4$.

i. $f(x) = (x + \sqrt{x}) \times (x + \sqrt{x})^2 = (x + \sqrt{x})(x^2 + 2x\sqrt{x} + x)$.

Donc f est de la forme $u \times v$ avec $u(x) = x + \sqrt{x}$ et $v(x) = x^2 + 2x\sqrt{x} + x$.

$u'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$ et $v'(x) = 2x + 2 \times \frac{3}{2}\sqrt{x} + 1 = 2x + 3\sqrt{x} + 1$.

Pensez à utiliser le résultat de la question **g.**

Donc, pour tout $x > 0$:

$$f'(x) = \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)(x^2 + 2x\sqrt{x} + x) + (x + \sqrt{x})(2x + 3\sqrt{x} + 1)$$

$$= x^2 + 2x\sqrt{x} + x + \frac{x\sqrt{x}}{2} + x + \frac{\sqrt{x}}{2} + 2x^2 + 3x\sqrt{x} + x + 2x\sqrt{x} + 3x + \sqrt{x}$$

$$\boldsymbol{f'(x) = 3x^2 + \frac{15x\sqrt{x}}{2} + 6x + \frac{3\sqrt{x}}{2}}.$$

7 COÛT MARGINAL

a. On écrit :

```
def f_m(f,x):
    return f(x+1)-f(x)
```

b. L'instruction

```
f_m(lambda x:0.005*x**2+0.15*x+1,1000)
```

affiche la valeur **10.154999999999745**

$f'(x) = 0{,}005 \times 2x + 0{,}15 = 0{,}01x + 0{,}15$

donc $f'(1000) = 0{,}01 \times 1000 + 0{,}15 = 10{,}15$.

Ces deux valeurs sont très proches.

On peut vérifier que $f_m(x) = 0{,}01x + 0{,}155$ après simplification.
Ce calcul devient rapidement très difficile lorsque la fonction f se complique.
On utilise alors l'approximation $f_m(x) \approx f'(x)$.

8 NOMBRE DÉRIVÉ (1)

1. Soit h un réel non nul, proche de zéro.

a. $$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{\frac{4}{5+2h}-\frac{4}{5}}{h}=\frac{\frac{4\times 5}{(5+2h)\times 5}-\frac{4\times(5+2h)}{5\times(5+2h)}}{h}=\frac{-8h}{(5+2h)\times 5}\times\frac{1}{h}=\frac{-8}{5(5+2h)}.$$

b. $\lim\limits_{h\to 0}(5+2h)=5$, donc $\lim\limits_{h\to 0}\frac{-8}{5(5+2h)}=-\frac{8}{5\times 5}=-\frac{8}{25}$.

donc f est dérivable en 1 et $\boldsymbol{f'(1)=-\frac{8}{25}}$.

2. Soit h un réel non nul, proche de zéro.

a. $$\frac{g(0+h)-g(0)}{h}=\frac{\sqrt{h^2+1}-1}{h}=\frac{\left(\sqrt{h^2+1}-1\right)\times(\sqrt{h^2+1}+1)}{h\times(\sqrt{h^2+1}+1)}$$

car $\sqrt{h^2+1}+1\neq 0$, donc :
$$\frac{g(0+h)-g(0)}{h}=\frac{h^2+1-1^2}{h\times(\sqrt{h^2+1}+1)}=\boldsymbol{\frac{h}{\sqrt{h^2+1}+1}}.$$

b. $\lim\limits_{h\to 0}\sqrt{h^2+1}=1$, donc $\lim\limits_{h\to 0}\frac{h}{\sqrt{h^2+1}+1}=\frac{0}{2}=0$,

donc g est dérivable en 0 et $g'(0)=0$.

9 UNE FONCTION INCONNUE

a. On lit sur le graphique :
$g(1)=2$ car $\mathscr{C}_g$ par passe le point de coordonnées $(1\ ;\ 2)$.
$g'(4)=0$ car $\mathscr{C}_g$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse 4.

b. Pour tout $x\in\,]0\ ;+\infty[$,
$$g'(x)=a\times 1+0+\frac{1}{2\sqrt{x}}=a+\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$
$$\begin{cases}g(1)=2\\ g'(4)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a\times 1+b+\sqrt{1}=2\\ a+\frac{1}{2\sqrt{4}}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b+1=2\\ a+\frac{1}{4}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=1\\ 4a+1=0\end{cases}$$

c. Résolvons le système :
$$\begin{cases}a+b=1\\ 4a+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=1\\ a=-\frac{1}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}\\ a=-\frac{1}{4}\end{cases}$$

On a donc : $a = -\dfrac{1}{4}$ et $b = \dfrac{5}{4}$.

g est définie sur $[0\,;+\infty[$ par $\boldsymbol{g(x) = -\dfrac{x}{4} + \dfrac{5}{4} + \sqrt{x}}$.

g' est définie sur $]0\,;+\infty[$ par $\boldsymbol{g'(x) = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}}$.

10 APPLICATION AUX SCIENCES PHYSIQUES

1. Pour tout $t \in [0\,;\,t_F]$, $\begin{cases} x'(t) = 7\sqrt{3} \\ y'(t) = -9{,}8t + 7 \end{cases}$

2. $x_S = 5\sqrt{3} = x(t_S)$ avec $x(t) = 7\sqrt{3}t$, d'où $7\sqrt{3}t_S = 5\sqrt{3}$, soit $t_S = \dfrac{5}{7}$.

$y'(t_S) = -9{,}8 \times \dfrac{5}{7} + 7 = -7 + 7 = 0$ et $x'(t_S) = 7\sqrt{3}$. **Donc** $\boldsymbol{\vec{v}(t_S)(7\sqrt{3}\,;0)}$.

3. a. $x_F = 12 + 5\sqrt{3} = x(t_F)$ soit $12 + 5\sqrt{3} = 7\sqrt{3}t_F$, d'où :

$$t_F = \frac{12 + 5\sqrt{3}}{7\sqrt{3}} = \frac{4 \times \sqrt{3}^2 + 5 \times \sqrt{3}}{7 \times \sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3} + 5}{7}.$$

b. $y'(t_F) = -9{,}8 \times \dfrac{4\sqrt{3} + 5}{7} + 7 = -1{,}4(4\sqrt{3} + 5) + 7$

$= -5{,}6 \times \sqrt{3} - 7 + 7 = -5{,}6\sqrt{3}$.

Donc $\boldsymbol{\vec{v}(t_F)(7\sqrt{3}\,;-5{,}6\sqrt{3})}$.

c. $\|\vec{v}(t_F)\|^2 = (7\sqrt{3})^2 + (-5{,}6\sqrt{3})^2 = 241{,}08$. $\|\vec{v}(t_F)\| = \sqrt{241{,}08} = 15{,}53$.

Le poids touche donc le sol avec une vitesse d'environ $\boldsymbol{15{,}5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}}$.

11 INTERPRÉTATION GRAPHIQUE

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout x réel, $f'(x) = 2x + a$.

$$\begin{cases} \mathrm{P}(-2\,;5) \in \mathscr{C}_f. \\ \text{La tangente à } \mathscr{C}_f \text{ au point d'abscisse 1 a pour coefficient directeur } -\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(-2) = 5 \\ f'(1) = -\dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-2)^2 + a \times (-2) + b = 5 \\ 2 \times 1 + a = -\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2a + b = 1 \\ a = -\dfrac{8}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 + 2a = 1 - \dfrac{16}{3} \\ a = -\dfrac{8}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -\dfrac{13}{3} \\ a = -\dfrac{8}{3} \end{cases}.$$

$f(x) = y$ signifie que M(x ; y) est sur la courbe de f.

f est définie sur $\mathbb{R}$ par $\boldsymbol{f(x) = x^2 - \dfrac{8}{3}x - \dfrac{13}{3}}$.

12 TANGENTE ET COEFFICIENT DIRECTEUR DONNÉ

a. Pour tout x réel, $f'(x) = 2x^2 + 4x - 6$.

b. $f(0) = 1$ et $f'(0) = -6$, donc l'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 est : $y = 1 - 6(x - 0) = -6x + 1$.

c. $\mathscr{C}_f$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse a si, et seulement si, $f'(a) = 0$.

Or $f'(a) = 0 \Leftrightarrow 2a^2 + 4a - 6 = 0$. C'est une équation du second degré.

$$\Delta = 4^2 - 4 \times 2 \times (-6) = 64 > 0\ .$$

Elle admet donc deux solutions :

$$\frac{-4+8}{4} = 1 \text{ et } \frac{-4-8}{4} = -3.$$

$\mathscr{C}_f$ admet une tangente horizontale aux points d'abscisses 1 et – 3.

d. (d) a pour coefficient directeur 1, donc $\mathscr{C}_f$ admet une tangente au point d'abscisse a, parallèle à $\mathscr{D}$ si, et seulement si, $f'(a) = 1$.

Deux droites sont parallèles si, et seulement si, elles ont même coefficient directeur.

Or $f'(a) = 1 \Leftrightarrow 2a^2 + 4a - 6 = 1$

$\Leftrightarrow 2a^2 + 4a - 7 = 0.$

$\Delta = 4^2 - 4 \times 2 \times (-7) = 72 > 0$.

Cette équation admet deux solutions :

$\dfrac{-4+6\sqrt{2}}{4} = -1 + \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ et $\dfrac{-4-6\sqrt{2}}{4} = -1 - \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ car $\sqrt{\Delta} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$.

$\mathscr{C}_f$ admet une tangente parallèle à $\mathscr{D}$ aux points d'abscisses :

$$\mathbf{-1 + \frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ et } -1 - \frac{3\sqrt{2}}{2}}.$$

13 TANGENTE PASSANT PAR UN POINT DONNÉ

1. $f(x) = x^2 + 2x - 6$ donc $f'(x) = 2x + 2$.

2. Une équation de T_{-2} la tangente à la courbe de f au point d'abscisse -2 est :

$$y = f'(-2)(x - (-2)) + f(-2).$$

Or $f(-2) = (-2)^2 + 2(-2) - 6 = 4 - 4 - 6 = -6$

et $f'(-2) = 2(-2) + 2 = -2$.

Donc T_{-2} :

$\boldsymbol{y} = -2(x + 2) - 6 = -2x - 4 - 6$

$= \mathbf{-2x - 10}$.

3. La tangente à la courbe au point d'abscisse x est parallèle à $\mathscr{D}$ si, et seulement si, ces deux droites ont même coefficient directeur, ce qui équivaut successivement à $f'(x) = -4$;

$2x + 2 = -4$; $2x = -6$; $x = -3$.

Il y a donc un unique point qui convient : **I(–3 ; –3)**.

4. a. Il semble que deux droites conviennent.

b. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $A(a\ ;\ f(a))$ le point d'abscisse a de la courbe de f.
La tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A a pour équation : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.
$y = (2a + 2)(x - a) + a^2 + 2a - 6$.
M(2 ; –2) est sur cette tangente équivaut successivement à :

$(2a + 2)(2 - a) + a^2 + 2a - 6 = -2$;

$4a - 2a^2 + 4 - 2a + a^2 + 2a - 6 = -2$;

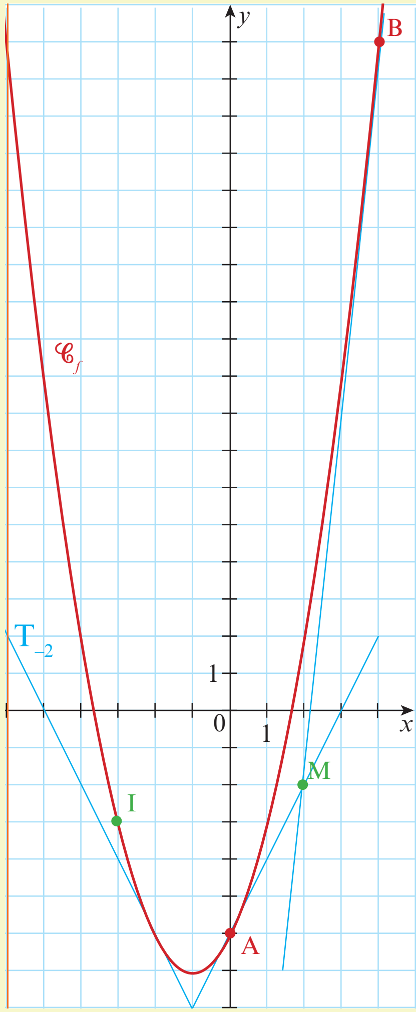
$-a^2 + 4a - 2 = -2$; $-a^2 + 4a = 0$;

$a(-a + 4) = 0$;

$a = 0$ ou $a = 4$.

On trouve donc deux points :

A(0 ; –6) et B(4 ; 18).



14 POSITION RELATIVE COURBE/TANGENTE

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2$, donc la tangente au point A d'abscisse $a = -1$ a pour équation :

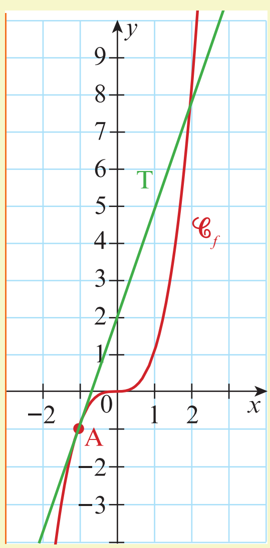
$$\begin{aligned} y &= f'(a)(x - a) + f(a) \\ &= f'(-1)(x - (-1)) + f(-1) \\ &= f'(-1)(x + 1) + f(-1). \end{aligned}$$

Or $f'(-1) = 3 \times (-1)^2 = 3$

et $f(-1) = (-1)^3 = -1$,

donc :

$$\begin{aligned} y &= 3(x + 1) + (-1) = 3x + 3 - 1 \\ &= \mathbf{3x + 2}. \end{aligned}$$



2. a. Soit $x \in \mathbb{R}$.
$(x+1)(x^2 - x - 2) = x^3 - x^2 - 2x + x^2 - x - 2 = x^3 - 3x - 2$.

b. $x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ et $x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$.
$x^2 - x - 2 = ax^2 + bx + c$ avec $a = 1$, $b = -1$, $c = -2$.
Son discriminant est $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 9 > 0$, donc il a deux racines $x_1 = -1$ et $x_2 = 2$.
Comme $a = 1 > 0$, on en déduit le tableau de signe de $x^3 - 3x - 2$:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x^2 - x - 2$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$x^3 - (3x+2)$		$-$	0	$-$	0	$+$	

c. On en déduit que :
• pour $x = -1$ ou $x = 2$, $x^3 - (3x+2) = 0$, c'est-à-dire $x^3 = 3x + 2$.
La courbe et la tangente sont sécantes.
• Pour $x \in]-\infty ;-1[\cup]-1 ; 2[$, $x^3 - (3x+2) < 0 \Leftrightarrow x^3 < 3x + 2$.
La courbe est en dessous de la tangente.
• Pour $x \in]2 ; +\infty[$, $x^3 - (3x+2) > 0 \Leftrightarrow x^3 > 3x + 2$.
La courbe est au- dessus de la tangente.

15 TANGENTE COMMUNE À DEUX COURBES

a. $g(x) = \dfrac{1}{v(x)}$ avec $v(x) = x + 1$ dérivable et ne s'annulant pas sur $]-1 ; +\infty[$, donc g est dérivable sur $]-1 ; +\infty[$ et $g'(x) = -\dfrac{v'(x)}{v(x)^2}$.

Or $v'(x) = 1$, donc $g'(x) = -\dfrac{1}{(x+1)^2}$ pour $x \in]-1 ; +\infty[$.

b. $f(0) = 1 = g(0)$, donc les courbes de f et g sont sécantes en leur point d'abscisse 0 et d'ordonnée 1. On le note A.

c. f est dérivable en 0, donc sa courbe admet une tangente au point A d'équation :
$$y = f'(0)(x-0) + f(0).$$
Pour $x \in]-1 ; +\infty[$, $f'(x) = 2x - 1$ donc, $f'(0) = 2 \times 0 - 1 = -1$.
Une équation de la tangente à la courbe de f au point A est donc :
$$\boldsymbol{y = -x + 1}.$$
$g'(0) = -\dfrac{1}{(0+1)^2} = -1$, donc on trouve de même que la courbe de g admet une tangente au point A d'équation $y = -x + 1$: c'est la même tangente que pour la courbe de f.

16 NOMBRE DÉRIVÉ (2)

1. a. Soit $h \neq 0$ proche de 0.
Le taux d'accroissement de f entre 2 et $2+h$ est :

$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h}.$$

Or $f(2+h)=(2+h)^2+5= 2^2+2\times2\times h+h^2+5$

$$= h^2+4h+9 \quad \text{et}$$

$f(2)=2^2+5=9$,

donc $\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=\dfrac{h^2+4h+9-9}{h}=\dfrac{h^2+4h}{h}=\boldsymbol{h+4}$.

b. Quand h tend vers 0, $h+4$ tend vers 4, valeur finie.
Donc **f est bien dérivable en 2 et $f'(2)=4$**.

2. $\dfrac{g(a+h)-g(a)}{h}=\dfrac{(a+h)^2-a^2}{h}$

$$=\frac{a^2+2ah+h^2-a^2}{h}=\frac{2ah+h^2}{h}=2a+h.$$

Or $\lim\limits_{h\to0}(2a+h)=2a$ donc le taux de variation a une limite finie quand h tend vers 0 : la fonction carré g est dérivable en a, et $\boldsymbol{g'(a)=2a}$.

17 TANGENTES

a. Les points A, B et C d'abscisses respectives –1, 0 et 2 ont respectivement pour ordonnées :
$g(-1)=2(-1)^3-4(-1)^2-5(-1)+5=-2-4+5+5=4$,
$g(0)=5$ et $g(2)=-5$.

b. $g'(x)=2\times3x^2-4\times2x-5\times1+0=6x^2-8x-5$.

Donc $g'(-1)=6(-1)^2-8(-1)-5=9$.
La tangente en A passe par A et a pour vecteur directeur $\vec{u}\,(1\,;9)$.
De même $g'(0)=-5$ et $g'(2)=3$, donc la tangente en B a pour vecteur directeur $\vec{v}\,(1\,;-5)$ et la tangente en C a pour vecteur directeur $\vec{w}\,(1\,;3)$.

c. L'équation réduite de la tangente en A est :

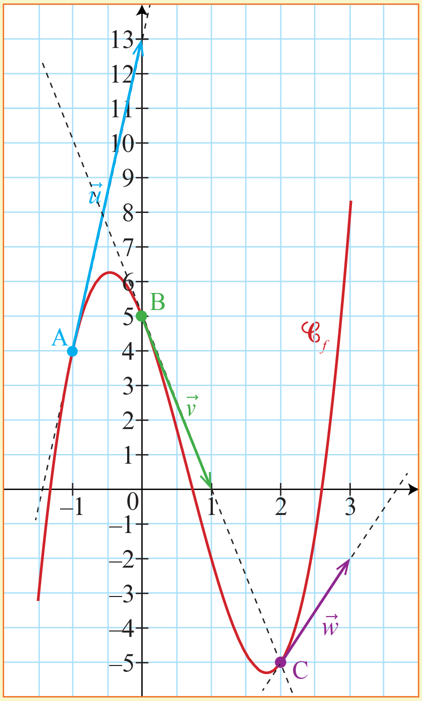
$$y=g(-1)+g'(-1)(x-(-1))=4+9(x+1)$$
$$=\boldsymbol{9x+13}.$$

L'équation réduite de la tangente en B est :

$$y=g(0)+g'(0)(x-0)=5-5x$$
$$=\boldsymbol{-5x+5}.$$

L'équation réduite de la tangente en C est :

$$y=g(2)+g'(2)(x-2)=-5+3(x-2)$$
$$=\boldsymbol{3x-11}.$$



18 CALCULS DE DÉRIVÉES (2)

a. $f(x) = \dfrac{3x}{7} - \dfrac{3}{7x} = \dfrac{3}{7}x - \dfrac{3}{7} \times \dfrac{1}{x}$ donc f est dérivable sur $]-\infty\,;0[$ et

$$f'(x) = \frac{3}{7} \times 1 - \frac{3}{7} \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{3}{7} + \frac{3}{7x^2}.$$

b. f est de la forme $g(ax+b)$ avec $g(x) = x^4$, $a = 2$, $b = -3$.
g est dérivable sur $\mathrm{I} = \mathbb{R}$, donc f également et $g'(x) = 4x^3$.

Donc $f'(x) = a \times g'(ax+b) = 2 \times 4(2x-3)^3 = \mathbf{8(2x-3)^3}$.

c. f est le quotient de deux polynômes dérivables sur $\mathrm{I} = \left]-\dfrac{1}{3};+\infty\right[$, et son dénominateur ne s'annule pas sur $\mathrm{I} = \left]-\dfrac{1}{3};+\infty\right[$.

Donc f est dérivable sur $\mathrm{I} = \left]-\dfrac{1}{3};+\infty\right[$ et $f = \dfrac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$

avec $u(x) = 2 - x$ et $v(x) = 3x + 1$.

Or $u'(x) = -1$ et $v'(x) = 3$.

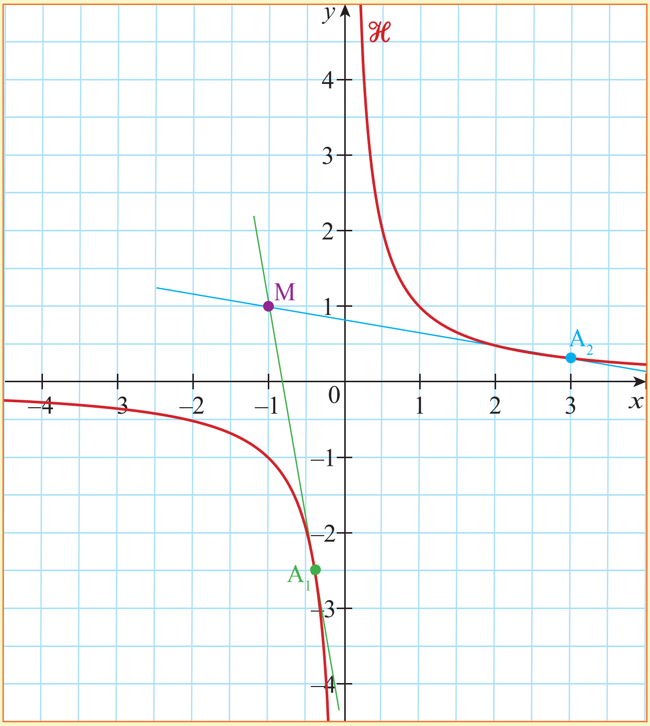
Donc, pour tout x dans $\mathrm{I} = \left]-\dfrac{1}{3};+\infty\right[$,

$$f'(x) = \frac{(-1)(3x+1) - (2-x) \times 3}{(3x+1)^2}$$

soit : $f'(x) = \dfrac{-3x - 1 - 6 + 3x}{(3x+1)^2} = \dfrac{\mathbf{-7}}{\mathbf{(3x+1)^2}}$.

19 TANGENTES À UNE HYPERBOLE

1.



Il semble que 2 tangentes passent par M.

2. a. La fonction f est dérivable sur $]-\infty\ ;0[\ \cup\ ]0\ ;+\infty[$ et pour tout $x \neq 0$, $f'(x) = \dfrac{-1}{x^2}$ donc la tangente au point A d'abscisse $a \neq 0$ a pour équation :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a),$$

avec $f'(a) = -\dfrac{1}{a^2}$ et $f(a) = \dfrac{1}{a}$.

Une équation de la tangente à la courbe de f au point A est :

$$y = -\frac{1}{a^2}(x-a) + \frac{1}{a} = -\frac{1}{a^2}x + \frac{a}{a^2} + \frac{1}{a} = -\frac{1}{a^2}x + \frac{1}{a} + \frac{1}{a}$$

soit $y = -\dfrac{1}{a^2}x + \dfrac{2}{a}$.

b. M(−1 ; 1) donc la tangente passe par M si, et seulement si,

$$1 = -\frac{1}{a^2}\times(-1) + \frac{2}{a} = \frac{1}{a^2} + \frac{2}{a},$$

ce qui équivaut successivement à :

$a^2 = 1 + \dfrac{2}{a} \times a^2 = 1 + 2a$ (en multipliant par $a^2 \neq 0$) ;

$a^2 - 2a - 1 = 0$.

c. L'équation $a^2 - 2a - 1 = 0$ est une équation du second degré avec $A = 1$, $B = -2$, $C = -1$.

Son discriminant est $\Delta = B^2 - 4AC = 8 > 0$, donc elle admet 2 solutions :

$$a_1 = \frac{-(-2) - \sqrt{8}}{2 \times 1} = \frac{2 - 2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2} \quad \text{et} \quad a_2 = \frac{-(-2) + \sqrt{8}}{2 \times 1} = 1 + \sqrt{2}.$$

Ces deux solutions étant non nulles, il y a donc **deux tangentes** passant par M, aux points d'abscisses $1 - \sqrt{2}$ et $1 + \sqrt{2}$, dont les équations sont :

$$y = -\frac{1}{(1-\sqrt{2})^2}x + \frac{2}{1-\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad y = -\frac{1}{(1+\sqrt{2})^2}x + \frac{2}{1+\sqrt{2}}.$$

20 FONCTION VALEUR ABSOLUE

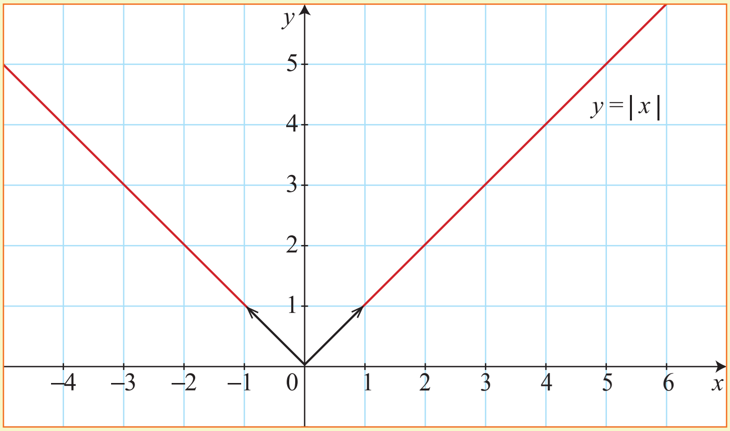
a. $\dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = \dfrac{|0+h| - |0|}{h} = \dfrac{|h| - 0}{h} = \dfrac{|h|}{h}$.

Donc $\dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = \begin{cases} \dfrac{h}{h} = 1 \text{ si } h > 0 \\ \dfrac{-h}{h} = -1 \text{ si } h < 0 \end{cases}$

b. Le quotient $\dfrac{f(0+h) - f(0)}{h}$ vaut 1 si $h > 0$ et -1 si $h < 0$, il n'admet donc pas de valeur limite quand h tend vers 0.

***f* n'est donc pas dérivable en** 0.

On dit que le taux de variation admet une « limite à droite » égale à 1 et une « limite à gauche » égale à –1. La courbe admet des « demi-tangentes » à gauche et à droite en 0, mais pas de tangente en 0.



21 DÉMONTRONS LES FORMULES

1. Soit h un réel non nul proche de 0.

a. $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}\times g(a+h)+f(a)\times\dfrac{g(a+h)-g(a)}{h}$

$$=\frac{f(a+h)\times g(a+h)-f(a)\times g(a+h)+f(a)\times g(a+h)-f(a)\times g(a)}{h}$$

$$=\frac{f(a+h)\times g(a+h)-f(a)\times g(a)}{h}.$$

b. f et g sont dérivables en a, donc :

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$$

et $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{g(a+h)-g(a)}{h}=g'(a)$

Or $\displaystyle\lim_{h\to 0}g(a+h)=g(a)$ donc :

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\times g(a+h)+f(a)\times\frac{g(a+h)-g(a)}{h}$$
$$=f'(a)\times g(a)+f(a)\times g'(a),$$

donc $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{(f+g)(a+h)-(f\times g)(a)}{h}=f'(a)\times g(a)+f(a)\times g'(a)$,

$(f\times g)$ est donc dérivable en a et :

$$(\boldsymbol{f}\times \boldsymbol{g})'(\boldsymbol{a})=\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a})\times \boldsymbol{g}(\boldsymbol{a})+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})\times \boldsymbol{g}'(\boldsymbol{a}).$$

2. a. $\dfrac{1}{g(a)\times g(a+h)}\times\left[\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}\times g(a)-f(a)\times\dfrac{g(a+h)-g(a)}{h}\right]$

$$=\frac{1}{g(a)\times g(a+h)}\times\frac{f(a+h)g(a)-f(a)g(a)+f(a)g(a)-f(a)g(a+h)}{h}$$

$$=\frac{1}{h}\times\left(\frac{f(a+h)g(a)-f(a)g(a+h)}{g(a)g(a+h)}\right)$$

$$=\frac{1}{h}\times\left(\frac{f(a+h)}{g(a+h)}-\frac{f(a)}{g(a)}\right)$$

$$=\frac{\dfrac{f(a+h)}{g(a+h)}-\dfrac{f(a)}{g(a)}}{h}.$$

b. $\lim\limits_{h\to 0} g(a+h) = g(a)$, donc $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{g(a)\times g(a+h)} = \dfrac{1}{g(a)^2}$.

De plus,

$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$ et $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{g(a+h)-g(a)}{h} = g'(a)$ donc :

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{g(a)\times g(a+h)} \times \left[\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \times g(a) - f(a)\times \frac{g(a+h)-g(a)}{h}\right]$$

$$= \frac{f'(a)\times g(a) - f(a)\times g'(a)}{g(a)^2}.$$

Donc $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\left(\dfrac{f}{g}\right)(a+h) - \left(\dfrac{f}{g}\right)(a)}{h} = \dfrac{f'(a)\times g(a) - f(a)\times g'(a)}{g(a)^2}$.

$\left(\dfrac{f}{g}\right)$ **est dérivable donc en** $\boldsymbol{a}$ **et :**

$$\boldsymbol{\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)\times g(a) - f(a)\times g'(a)}{g(a)^2}}.$$

22 APPROXIMATION AFFINE

Partie A.

1. T : $y = f(a) + f'(a)(x-a)$.

2. $M \in \mathscr{C}_f$, donc M a pour coordonnées $(a+h\ ;\ f(a+h))$.
$N \in T$ donc :

$$y_N = f(a) + f'(a)\times((a+h)-a) = f(a) + f'(a)h.$$

D'où $N(a+h\,;f(a)+hf'(a))$.

Ensuite, $MN = \|\overrightarrow{MN}\|$ avec $\overrightarrow{MN}(0\ ;\ f(a)+hf'(a)-f(a+h))$.

Donc $MN = \sqrt{0^2 + \left(f(a)+hf'(a)-f(a+h)\right)^2}$

$MN = |f(a)+hf'(a)-f(a+h)|$.

3. Par définition de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a, lorsque h est proche de 0, le point M est proche du point N.
Ces points ayant même abscisse, il en résulte que $y_M \approx y_N$, c'est-à-dire que :

$$f(a+h) \approx f(a) + hf'(a).$$

Partie B.

1. a. $f(1) = \sqrt{1} = 1$.

Pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, donc $f'(1) = \dfrac{1}{2}$.

Pour calculer $f'(1)$, il faut impérativement dériver avant de calculer l'image de 1 par f'.

b. Pour h proche de zéro, $f(1+h) = f(1) + hf'(1)$, soit :

$$\sqrt{1+h} \approx 1 + \frac{h}{2}.$$

c. $1,001 = 1 + h$ avec $h = 0,001$ proche de zéro.

Donc $\sqrt{1,001} \approx 1 + \frac{0,001}{2}$, soit :

$$\sqrt{\mathbf{1,001}} \approx \mathbf{1,000\,5}.$$

2. $\frac{1}{2+h} = g(2+h)$, g désignant la fonction inverse.

Alors $g(2) = \frac{1}{2}$ et, pour tout $x \neq 0$,

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2} \text{ d'où } g'(2) = -\frac{1}{4}.$$

Pour h proche de 0,

$$g(2+h) = g(2) + hg'(2).$$

Or $g(2) + hg'(2) = \frac{1}{2} + h \times \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} - \frac{h}{4}.$

Donc, pour h proche de 0 :

$$\frac{1}{2+h} \approx \frac{1}{2} - \frac{h}{4}.$$

$1,98 = 1 + h$ avec $h = -0,02.$

$-0,02$ étant proche de 0 : $\frac{1}{1,98} \approx \frac{1}{2} - \frac{-0,02}{2}.$

Or $\frac{1}{2} - \frac{-0,02}{2} = 0,5 + 0,01 = 0,51$

donc : $\mathbf{\frac{1}{1,98} \approx 0,51.}$

5 Applications de la dérivation

I ÉTUDE DES VARIATIONS D'UNE FONCTION

1. Définitions

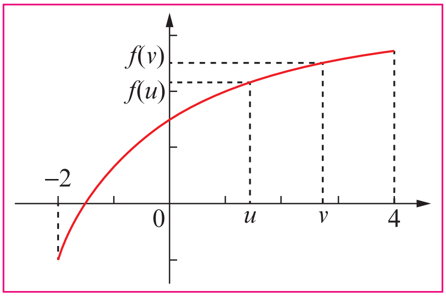
Soit *f* une fonction définie sur un intervalle I.

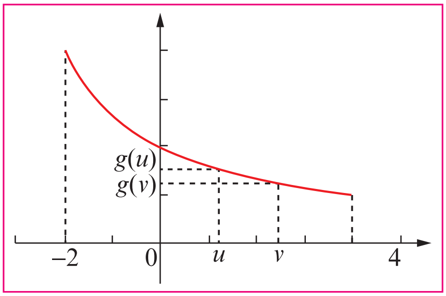
• Si pour tout u et v de I tel que $u < v$, on a $f(u) < f(v)$, on dit que *f* est **strictement croissante** sur I.

• Si pour tout u et v de I tel que $u < v$, on a $f(u) > f(v)$, on dit que *f* est **strictement décroissante** sur I.

• Si pour tout u et v de I tel que $u < v$, on a $f(u) = f(v)$, on dit que *f* est **constante** sur I.

EXEMPLES : f est strictement croissante sur l'intervalle [–2 ; 4].
g est strictement décroissante sur l'intervalle [– 2 ; 4].





2. Sens de variation et signe de la dérivée

Soit *f* une fonction dérivable sur un intervalle I.

• Si f' est strictement positive sur I, sauf en des valeurs isolées de x où $f'(x) = 0$, alors *f* est strictement croissante sur I.

• Si f' est strictement négative sur I, sauf en des valeurs isolées de x où $f'(x) = 0$, alors *f* est strictement décroissante sur I.

• Si f' est nulle sur I, alors f est constante sur I.

II EXTREMUM, EXTREMUM LOCAL D'UNE FONCTION

1. Définitions

Soit *f* une fonction définie sur un intervalle I et x_0 un élément de I.

• $f(x_0)$ est le **maximum** de *f* sur I $\Leftrightarrow$ pour tout x de I, $f(x) \leqslant f(x_0)$.

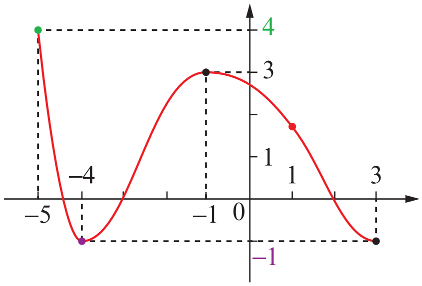
• $f(x_0)$ est le **minimum** de *f* sur I $\Leftrightarrow$ pour tout x de I, $f(x) \geqslant f(x_0)$.

• Lorsque x_0 n'est pas une borne de I, on dit que f admet un **maximum local** en x_0 s'il existe un intervalle ouvert J inclus dans I et contenant x_0 pour lequel $f(x) \leqslant f(x_0)$ pour tout x de J.

• Lorsque x_0 n'est pas une borne de I, on dit que f admet un **minimum local** en x_0 s'il existe un intervalle ouvert J inclus dans I et contenant x_0 pour lequel $f(x) \geqslant f(x_0)$ pour tout x de J.

• $f(x_0)$ est un **extremum** (local) de f si $f(x_0)$ est un maximun (local) ou un minimum (local) de f sur I.

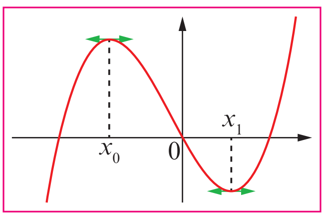
EXEMPLE : la fonction f représentée est définie sur $I = [-5\,;3]$.
$f(-5) = 4$ est le maximum de f sur I ; $f(-4) = f(3) = -1$ est le minimum de f sur I ; f admet un maximum local en -1, égal à 3, et un minimum local en -4, égal à -1 : il coïncide avec le minimum de f sur I.



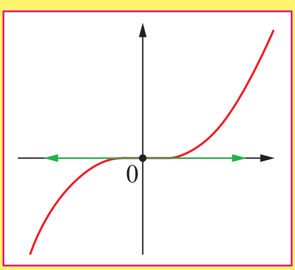
2. Extemum et dérivée

PROPRIÉTÉ :

Soit f une fonction définie, dérivable sur un intervalle I et x_0 un élément de I. Si f présente un extremum local en x_0 alors $f'(x_0) = 0$.
En extremum local, la tangente à la courbe est horizontale.



La réciproque de cette propriété est fausse.
On a représenté ci-dessous la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 3x^2$ pour tout x de $\mathbb{R}$. Ainsi $f'(0) = 0$ et pour tout $x \neq 0$, $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
$f(0) = 0$ n'est donc pas un extremum local pour f.



PROPRIÉTÉ :

Soit f une fonction définie, dérivable sur un intervalle I et x_0 un élément de I. Si f' s'annule en x_0 et change de signe en x_0 alors, f admet un extremum local en x_0.

MÉTHODE 1

Étudier les variations d'une fonction *f*

➜ Voir les exos 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 15 et 16.

Étape 1. Calculer $f'(x)$.

> On utilise les méthodes de dérivation du chapitre 4.

Étape 2. Si son signe n'est pas évident, mettre $f'(x)$ sous forme de produit ou de quotient pour construire un tableau de signes.
Si $f'(x)$ ne peut être mis sous forme d'un produit ou d'un quotient, résoudre l'équation $f'(x)=0$ et l'inéquation $f'(x)>0$.
Étape 3. À partir du signe de $f'(x)$ donner les variations de f par une phrase ou dans un tableau de variations.

Exo résolu

Étudier les variations de la fonction *f* dans chacun des cas suivants :
a. *f* est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=x^3-3x.$$

b. *f* est définie sur $[0\ ;+\infty[$ par :

$$f(x)=1+x-x\sqrt{x}.$$

CORRIGÉ

a. Étape 1. La fonction *f* est polynomiale donc dérivable sur $\mathbb{R}$:

$$f'(x)=3x^2-3.$$

Étape 2. $f'(x)=3x^2-3=3\left(x^2-1\right)=\mathbf{3(x-1)(x+1)}$.
Étape 3. $3>0$ donc le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $(x-1)(x+1)$.
On dresse son tableau de signes, puis le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$			
$(x-1)(x+1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	2	↘	-2	↗	

b. Étape 1.
f est définie sur $[0\ ;+\infty[$ mais $x\mapsto\sqrt{x}$ n'est dérivable que sur $]0\,;+\infty[$, donc f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$.

> Pour la dérivée d'un produit et de $x\mapsto\sqrt{x}$: voir le chapitre 4.

Pour tout $x>0$, $f'(x)=0+1-\left(\sqrt{x}+x\times\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)=\mathbf{1-\dfrac{3\sqrt{x}}{2}}$.

Étape 2.

Soit $x > 0$:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 = \frac{3\sqrt{x}}{2}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = \frac{4}{9}$$

car la fonction carré est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 > \frac{3\sqrt{x}}{2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{2}{3} > \sqrt{x} \Leftrightarrow \frac{4}{9} > x$$

car la fonction carré est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

On en déduit :

$$\boldsymbol{f'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{4}{9} < x}\ .$$

Étape 3. **Ainsi f est strictement croissante sur $\left[0\,;\frac{4}{9}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\frac{4}{9}\,;+\infty\right[$.**

MÉTHODE 2

Déterminer les extremums locaux d'une fonction *f* dérivable sur un intervalle I

➜ Voir les exos 2, 3, 6, 8, 10, 13, 14 et 16.

Étape 1. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

Étape 2. Si la fonction f est croissante sur un intervalle $]a\,;x_0]$ inclus dans I et décroissante sur un intervalle $[x_0\,;b[$ inclus dans I, on conclut que f admet un maximum local en x_0.

Si la fonction f est décroissante sur un intervalle $]a\,;x_0]$ inclus dans I et croissante sur un intervalle $[x_0\,;b[$ inclus dans I, on conclut que f admet un minimum local en x_0.

Exo résolu

Déterminer les extremums locaux de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - 3x\,.$$

CORRIGÉ

Étape 1. On reprend le tableau de l'exercice précédent.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$			
$(x-1)(x+1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	2	↘	-2	↗	

Étape 2.

f est croissante sur $]-\infty\,;-1]$ et décroissante sur $[-1\,;1[$, donc f admet un maximum local en -1 :

son maximum sur $]-\infty\,;1]$ est 2.

f est décroissante sur $[-1\,;1[$ et croissante sur $[1\,;+\infty[$, donc f admet un minimum local en 1 :

son minimum sur $[-1\,;+\infty[$ est -2.

TESTER SES CONNAISSANCES

1 VARIATIONS DES FONCTIONS AFFINES

★ | 10 min | ▸ P. 149

Dériver sur $\mathbb{R}$ la fonction affine *f* et établir ses variations dans chacun des cas suivants.

a. $f(x) = 3x - 1$.

Voir la méthode 1.

b. $f(x) = -2x + 5$

c. $f(x) = mx + p$ avec $m \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{R}$.

Distinguer les cas, suivant le signe de m.

2 VARIATIONS DES FONCTIONS POLYNÔME DU SECOND DEGRÉ

★ | 15 min | ▸ P. 149

Dériver sur $\mathbb{R}$ la fonction *f*, établir ses variations et déterminer l'existence d'un éventuel extremum dans chacun des cas suivants :

a. $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$.

Voir la méthode 1 pour les variations et la méthode 2 pour l'extremum.

b. $f(x) = -x^2 + 3x - 2$.

c. $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$.

Distinguer les cas suivant le signe de *a*.

3 AVEC UNE FONCTION POLYNÔME DE DEGRÉ 3

★ | 15 min | ▸ P. 150

Déterminer les variations de la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par :

a. $f(x) = x^3 + ax$ avec a réel fixé strictement positif.

b. $f(x) = x^3 - x$.

On précisera les valeurs exactes des extremums locaux, puis leur valeur approchée à 10^{-2} près.

Voir la méthode 1 pour les variations et la méthode 2 pour les extremums.

4 AVEC UNE FONCTION RATIONNELLE ★ | 15 min | ▶ P. 151

Soit f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{1+x}{1-x}$, et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

a. Déterminer l'ensemble de définition D de f et justifier que f y est dérivable.

> À quelle condition une fraction rationnelle est-elle définie et dérivable.

b. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathrm{D}$.

> Pour la dérivée d'un quotient, vois le chapitre 4.

c. Dresser le tableau de variations de f sur D.

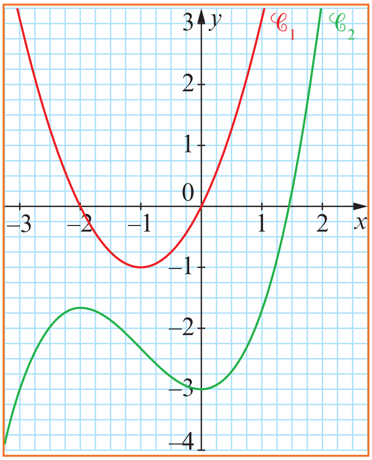
> Voir la méthode 1.

d. Construire $\mathscr{C}_f$ sur l'ensemble $[-3\,;1[\cup]1\,;5]$, en faisant apparaître les tangentes à la courbe aux points d'abscisses -1, 0, 2 et 3.

> Quel est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse *a* ?
> Revoir le Chapitre 4 en cas de difficultés.

5 LECTURE GRAPHIQUE ★ | 10 min | ▶ P. 152

On a représenté une fonction f et sa dérivée f'.



a. Attribuer à chacune des courbes la fonction correspondante.

> Le signe de *f′* doit correspondre aux variations de *f*.

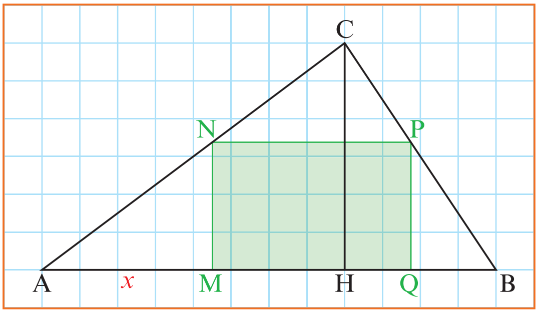
b. Placer sur la courbe représentant f les point A et B d'abscisses respectives – 3 et 0, puis tracer les tangentes T_A et T_B en ces points.

> Pour le tracé des tangentes, voir la méthode 2 du chapitre 4.

6 AIRE MAXIMALE

★★ | 25 min | ▸ P. 153

H est le pied de la hauteur issue de C dans le triangle ABC.
On donne AB = 96, AH = 64, BH = 32 et CH = 48. L'unité est le mm.
M est un point de [AH] et on note $x = \text{AM}$. MNPQ est un rectangle.



1. À l'aide du théorème de Thalès, démontrer que :

a. $\text{MN} = \dfrac{3}{4}x$. **b.** $\text{BQ} = \dfrac{1}{2}x$ (on pourra utiliser le résultat de **a.**).

2. En déduire que l'aire du rectangle MNPQ en fonction de x est donnée par la fonction f définie sur [0 ; 64] par : $f(x) = -1{,}125x^2 + 72x$.

3. Pour quelle valeur de x l'aire du rectangle MNPQ est-elle maximale ?

> Étudier les variations de f pour trouver les extremums éventuels.
> Voir les méthodes 1 et 2.

S'ENTRAÎNER

7 VARIATIONS ET ENCADREMENT

★★ | 15 min | ▸ P. 154

Soit f la fonction définie sur] –10 ; +∞[par :

$$f(x) = \frac{5x^2 + 19x + 10}{x + 10}.$$

a. Calculer $f'(x)$ pour $x \in]-10\,;+\infty[$ et justifier que $f'(x)$ a le même signe que $x^2 + 20x + 36$ sur]–10 ; +∞[.

> Pour la dérivée d'un quotient voir chapitre 4.

b. Après avoir donné le tableau de signe de $x^2 + 20x + 36$ sur $\mathbb{R}$, déterminer le tableau de signe de $f'(x)$ sur] –10 ; +∞ [et en déduire le tableau de variations de f sur] –10 ; +∞[.

> Pour le tableau de signe d'une fonction polynôme du second degré voir le chapitre 3.

c. Encadrer le plus précisément possible $f(x)$ si $x \in [-5\,;10]$.

8 MAXIMUM AVEC TABLEAU ET PYTHON | ★★ | 35 min | ▸ P. 155

On considère la fonction g définie sur $[0\,;4]$ par $g(x) = -2x + 3 + 5\sqrt{x}$.

1. a. Compléter et lancer le script suivant pour tracer la courbe représentative de g sur $[0\,;4]$:

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
plt.axis([-0.5,4.5,-1,10])
plt.grid()
 x=np.linspace(...,...,100)
y=...
plt.plot(...,...)
plt.show()
```

Pour des listes, la fonction racine carré s'obtient avec l'instruction np.sqrt

b. Conjecturer les variations et l'existence d'un maximum pour g sur $[0\,;4]$.

2. Écrire une fonction Python, nommée g , qui renvoie les valeurs de $g(x)$.

3. Voici un algorithme qui donne une valeur approchée du maximum de la fonction g sur $[0\,;4]$ et de la valeur α en laquelle il est atteint.

```
x ← 0
m ← g(0)
Tant que x < 4
    x ← x + 0,1
    Si g(x) > m
        m ← g(x)
        alpha ← x
    Fin Si
Fin tant que
 Afficher les valeurs de m et de alpha
```

a. À l'aide du tableur de votre calculatrice, déterminer le résultat en sortie de l'algorithme à 10^{-4} près.

Est-ce cohérent avec le maximum trouvé à la question **1.b.** ?

Calculer les valeurs de $g(x)$ pour x allant de 0 à 4 avec un pas de 0,1.

b. Traduire cet algorithme en Python et exécuter le script.

4. Étudier les variations de la fonction g sur $[0\,;4]$ et déterminer le maximum de g sur cet intervalle. Comparer avec les résultats précédents.

Voir la méthode 1 pour les variations et la méthode 2 pour les extremums.

9 COEFFICIENTS INCONNUS

★★ | 25 min | ▸ P. 156

Soit une fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :

$f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x}$ où a, b, c sont des nombres réels.

On donne le tableau de signe de $f'(x)$ et de variation de f :

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	-3	$\searrow$	$-\infty$

1. Soit f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
Déterminer $f'(x)$ en fonction de a, c et x.

2. a. En utilisant les valeurs prises par f et f' que donne le tableau, et sachant de plus que $f'(1) = 3$, montrer que les nombres réels a, b et c sont solutions du système :

$$\begin{cases} 4a + 2b + c = -6 \\ 4a - c = 0 \\ a - c = 3 \end{cases}$$

b. Déterminer les nombres réels a, b et c.

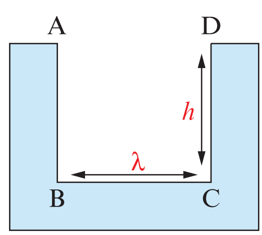
> On pourra commencer par résoudre le système composé des deux dernières équations.

c. En déduire l'expression de $f(x)$.
Tracer alors la courbe de la fonction f obtenue sur votre calculatrice ou sur ordinateur pour retrouver le tableau de variations du **1.** et la donnée supplémentaire du **2. a.**

10 FROTTEMENT MINIMAL

★★ | 25 min | ▸ P. 157

On veut, avant construction, rendre minimal le frottement d'un fluide contre les parois d'un canal ouvert, de section intérieure rectangulaire $ABCD$.
L'aire de la section intérieure de ce canal doit être de $0{,}5\ \text{m}^2$.
On désigne par h la hauteur et par λ la largeur (en m) de cette section intérieure.



On admettra que le frottement est minimum lorsque la longueur $AB + BC + CD$ de la section intérieure est minimale.

1. a. Écrire λ en fonction de h.

b. Montrer que la longueur $g(h)$ du contour intérieur de la section, fonction de h, s'exprime, pour $h > 0$, par $g(h) = 2h + \dfrac{1}{2h}$.

c. Montrer que, pour tout $h > 0$,

$$g'(h) = \frac{(2h-1)(2h+1)}{2h^2}.$$

Pour la dérivée d'un quotient : voir le chapitre 4.

d. Étudier le sens de variation de la fonction sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ et dresser son tableau de variations.

Voir la méthode 1 pour les variations.

2. Déduire de ce qui précède les valeurs de h et de λ permettant d'obtenir le frottement minimum.

Voir la méthode 2 pour les extremums.

11 POSITIONS RELATIVES

★★ | 35 min | ▸ P. 158

Soit f la fonction définie sur $D_f =]-\infty\,;1[\,\cup\,]1\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1}.$$

g la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x+1$.

On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ leurs courbes représentatives dans un repère orthonormal.

a. Calculer et factoriser $f'(x)$ pour $x \in D_f$.

Pour la dérivée d'un quotient, voir le chapitre 4.

b. Dresser le tableau de variations de f.

Voir la méthode 1 pour les variations.

c. Démontrer que, pour tout $x \neq 1$,

$$f(x) = x + 1 + \frac{1}{x-1}.$$

On pourra partir du membre de droite.

d. Étudier le signe de $f(x) - g(x)$ et en déduire la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

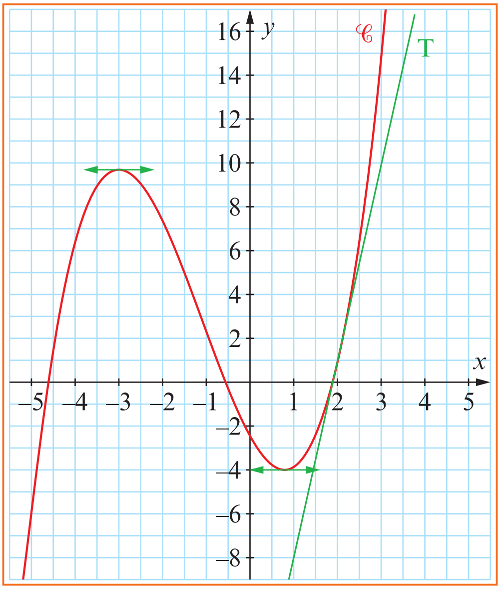
e. Dans un repère orthonormé, tracer $\mathscr{C}_g$ puis $\mathscr{C}_f$ en faisant apparaître les tangentes horizontales.

PRÉPARER UN CONTRÔLE

12 QCM

★ | 10 min | ▸ P. 159

Ci-dessous est représentée la courbe $\mathscr{C}$ d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$. T est la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 2. On a représenté les deux tangentes horizontales à la courbe $\mathscr{C}$, aux points d'abscisses –3 et 0,8.



Dans chaque question, une seule affirmation est exacte. Laquelle ?

1. Le nombre dérivé de f en –5 :

a. vaut –6 **b.** vaut 0 **c.** est un réel strictement positif
d. est un réel strictement négatif

Utiliser les variations de la fonction *f*.

2. Que vaut $f'(2)$?

a. $\frac{9}{2}$ **b.** 9 **c.** $\frac{2}{9}$ **d.** $\frac{1}{9}$

En cas de difficultés, reprendre la méthode 2 du chapitre 4.

3. La tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse -3 a pour équation :

a. $y = x$ **b.** $x = -3$ **c.** $y = 9{,}75$ **d.** $x = 9{,}75$

Pour l'équation de la tangente, voir la méthode 2 du Chapitre 4.

4. L'inéquation $f(x) \leqslant 9x - 17$ admet, sur $[0\,;5]$:

a. aucune solution **b.** une solution **c.** deux solutions
d. une infinité de solutions

Déterminer l'équation de la tangente T : voir la méthode 2 du Chapitre 4.

5. L'ensemble des solutions de l'inéquation $f'(x) \leqslant 0$ est :
a. $[-3\,;1]$ **b.** $[-3\,;-0{,}5]$ **c.** $[-0{,}5\,;1{,}8]$ **d.** $[-3\,;0{,}8]$

13 UN TRIANGLE D'AIRE MINIMALE

★★ | 45 min | P. 159

Partie A. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]2\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = x + 2 + \frac{4}{x-2}.$$

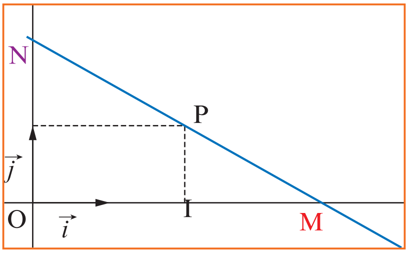
1. Démontrer que, pour tout $x > 2$, $f'(x) = \dfrac{x(x-4)}{(x-2)^2}$.

Pour gagner du temps sur la dérivée, écrire $\dfrac{4}{x-2} = 4 \times \dfrac{1}{x-2}$.

2. Dresser le tableau de variations de f.

Voir la méthode 1 pour les variations.

Partie B. Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,;\vec{j})$, on donne les points P et I de coordonnées respectives $(2\,;1)$ et $(2\,;0)$.
Le point M est un point variable de l'axe $(\mathrm{O}\,;\vec{i})$, d'abscisse x supérieure strictement à 2. La droite (PM) coupe l'axe des ordonnées en N.



1. Démontrer que l'ordonnée de N est égale à $\dfrac{x}{x-2}$.

Deux méthodes possibles, avec des triangles ou des vecteurs...

2. On note $\mathscr{A}(x)$ l'aire du triangle OMN. Montrer que $\mathscr{A}(x) = \dfrac{1}{2} f(x)$.

3. Construire le triangle OMN d'aire minimale.
Justifier correctement la construction.

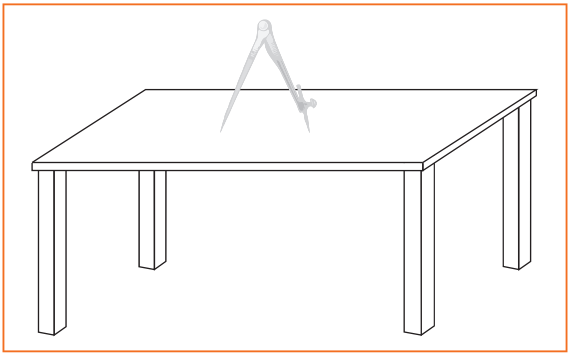
Voir la méthode 2 pour les extremums de la fonction $\mathscr{A}$.

ALLER PLUS LOIN

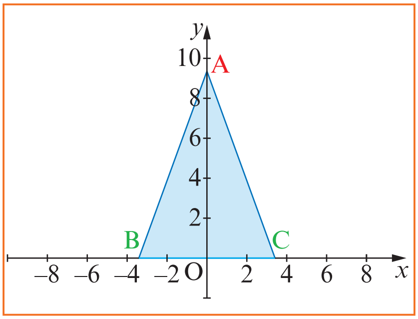
14 PROBLÈME

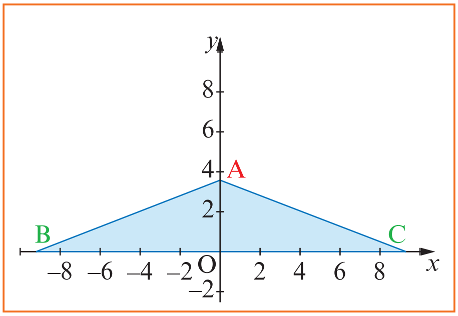
★★ | 40 min | ▸ P. 000

Un compas dont les pointes sont posées sur une table forme avec celle-ci un triangle.



Lorsque l'écartement du compas varie, l'aire du triangle ainsi obtenu varie. L'objectif de ce problème est de déterminer la position du compas pour laquelle l'aire du triangle est maximale.
On se place dans le cas où les branches du compas mesurent 10 cm.
Dans les deux figures ci-après, le point A est situé sur l'axe des ordonnées et représente le sommet du compas. L'axe des abscisses représente la table.
Les points B et C représentent les extrémités des branches du compas.





1. Justifier que B et C sont les points d'intersection d'un cercle et d'une droite que l'on définira.

2. Posons $t = \mathrm{OA}$ et notons $f(t)$ l'aire du triangle ABC correspondante.

a. Dans quel intervalle I varie t ?

b. Démontrer que, pour tout $t \in \mathrm{I}$, $f(t) = \sqrt{t^2(100 - t^2)}$.

3. Soit u la fonction définie sur I par $u(t) = t^2(100 - t^2)$.

a. Calculer et factoriser au maximum $u'(t)$.

> Revoir le chapitre 4, puis penser aux identités remarquables…

b. Dresser le tableau de variations de u sur I.

> Voir la méthode 1.

4. En déduire le tableau de variations de $f = \sqrt{u}$.

> Comme la fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$, on admet que $\sqrt{u}$ a le même sens de variation que u.

5. Pour quelle distance OA, l'aire du triangle ABC est-elle maximale ? Calculer l'aire maximale du triangle, puis démontrer que cette valeur de $t = \mathrm{OA}$ correspond au cas où les branches du compas sont perpendiculaires.

15 FONCTION RATIONNELLE | ★★★ | 60 min | ▸ P. 162

Soit f la fonction définie sur $]-\infty ; -1[\cup]-1 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{(x+1)^2}.$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal.

Partie A. Étude des variations de *f*

1. Démontrer que, pour tout x appartenant au domaine de définition de f :

$$f'(x) = \frac{x(x^2 + 3x + 4)}{(x+1)^3}.$$

> Remarquer que la dérivée de $v : x \mapsto (x+1)^2$ est $v' : x \mapsto 2(x+1)$.

2. Étudier le signe de $x^2 + 3x + 4$ sur $\mathbb{R}$.

3. Justifier que $(x+1)^3$ est du même signe que $(x+1)$ et en déduire le signe de $(x+1)^3$ sur $\mathbb{R}$.

> On rappelle que la fonction cube $\begin{cases} \text{est strictement négative sur }]-\infty ; 0[. \\ \text{s'annule en } 0. \\ \text{est strictement positive sur }]0 ; +\infty[. \end{cases}$

4. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

Partie B Construction de la courbe représentative de *f*

1. Déterminer les équations réduites des tangentes T_1, T_2 et T_3 à $\mathscr{C}_f$ aux points d'abscisses respectivement -2, $-\dfrac{1}{2}$ et 0.

Pour l'équation de la tangente, voir la méthode 2 du chapitre 4.

2. Soit $\mathscr{D}$ la droite d'équation $y = x$. Dresser le tableau de signes de $f(x) - x$. En déduire la position relative de $\mathscr{C}_f$ et de $\mathscr{D}$.

3. Construire sur $[-5\,;5]$ les droites $\mathscr{D}$, T_1, T_2 et T_3, puis la courbe $\mathscr{C}_f$.

16 VOLUME D'UN CÔNE | ★★★ | 55 min | P. 164

Partie A. Étude de fonction

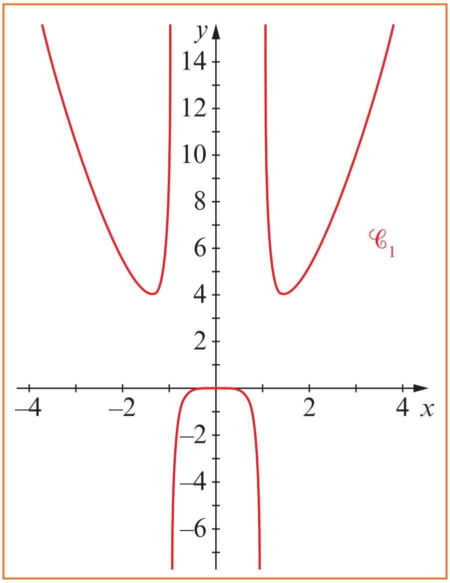
Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^4}{x^2 - 1}$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$.

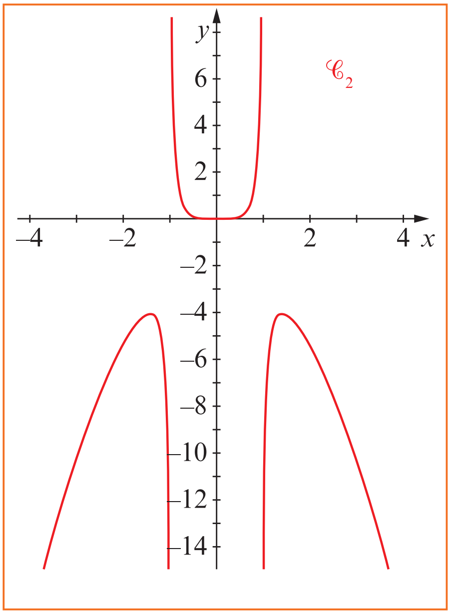
1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de la fonction *f*.

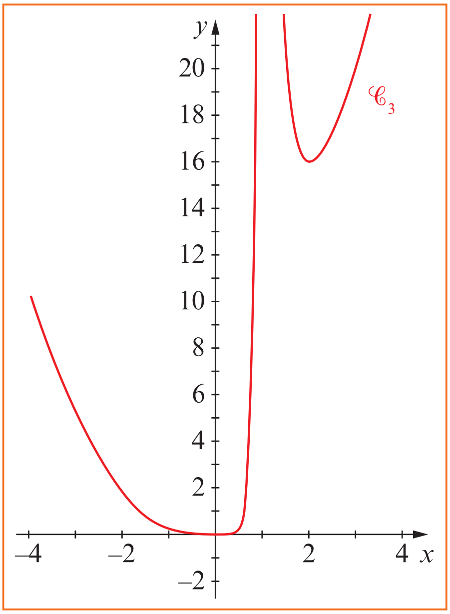
2. Vérifier que, pour tout $x \in D_f$: $f'(x) = \dfrac{2x^3(x^2 - 2)}{(x^2 - 1)^2}$.

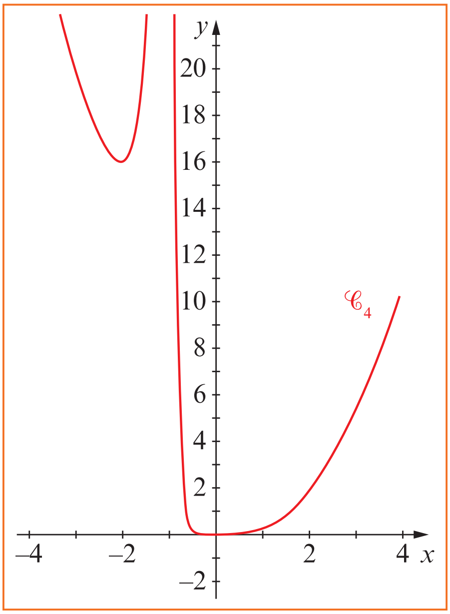
3. Dresser le tableau de variations de *f*.

4. Quatre courbes sont données ci-dessous. Indiquer celle qui représente f.




y
x
6
4
2
–2
–4
–6
–8
–10
–12
–14
–4
–2
2
4
𝒞2


y
x
20
18
16
14
12
10
8
6
4
2
–2
–4
–2
2
4
𝒞3

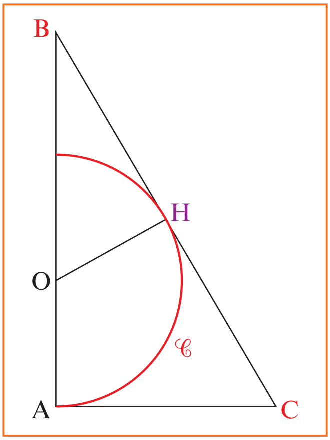

y
x
20
18
16
14
12
10
8
6
4
2
–2
–4
–2
2
4
𝒞4

Partie B. Volume d'un cône

Dans la figure ci-dessous :

- les points A et H appartiennent au cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1.
- la tangente à $\mathscr{C}$ en H coupe (OA) en B.
- la tangente à $\mathscr{C}$ en A coupe (BH) en C.

On pose $AB = h$ et $AC = x$ (avec $x > 1$).



1. a. Démontrer que les angles $\widehat{BOH}$ et $\widehat{BCA}$ sont égaux.
On notera par la suite $\alpha = \widehat{BOH} = \widehat{BCA}$.

b. Calculer alors $\tan \alpha$ de deux façons différentes et établir l'égalité :

$$BH^2 \times AC^2 = AB^2 \times OH^2.$$

c. En déduire, en justifiant soigneusement, que $h = \dfrac{2x^2}{x^2 - 1}$.

On pourra commencer par établir la relation $(h^2 - 2h)x^2 = h^2$.

2. a. En pivotant autour de l'axe (AB), le triangle ABC engendre un cône de révolution de sommet B.
Sachant que le volume d'un cône de révolution est :

$$V = \frac{(\text{aire de la base}) \times (\text{hauteur})}{3},$$

exprimer le volume $V(x)$ du cône en fonction de x et vérifier que :

$$V(x) = \frac{2\pi}{3} f(x) \text{ (avec } x > 1).$$

b. À l'aide des résultats de la **partie A**, déterminer pour quelle valeur de x, le volume du cône est minimal.

c. Calculer, pour cette valeur de x, la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$.
Arrondir à 0,1 degré près.

CORRIGÉS

1 VARIATIONS DES FONCTIONS AFFINES

a. $f'(x) = 3 \times 1 + 0 = 3 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Donc *f* est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

b. $f'(x) = -2 \times 1 + 0 = -2 < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Donc *f* est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

c. $f'(x) = m \times 1 + 0 = m$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc :
Si $m > 0$, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$;
Si $m < 0$, f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$;
Si $m = 0$, f est constante sur $\mathbb{R}$.

On a retrouvé ici, à l'aide de la dérivation, un résultat connu dès la Seconde sur le sens de variation des fonctions affines.

2 VARIATIONS DES FONCTIONS POLYNÔME DU SECOND DEGRÉ

a. $f'(x) = 3 \times 2x - 6 \times 1 + 0 = 6x - 6$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
On étudie le signe de la fonction affine f' :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 6 = 0 \Leftrightarrow 6x = 6 \Leftrightarrow x = 1.$$

Comme le coefficient directeur de f' est $6 > 0$, on en déduit :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x) = 6x - 6$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	-2	$\nearrow$	

Ainsi f admet un minimum sur $\mathbb{R}$ atteint pour $x = 1$: c'est $f(1) = \mathbf{-2}$.

b. $f'(x) = -2x + 3 \times 1 + 0 = -2x + 3$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
On étudie le signe de la fonction affine f' :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x + 3 = 0 \Leftrightarrow -2x = -3 \Leftrightarrow x = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}.$$

Comme le coefficient directeur de f' est $-2 < 0$, on en déduit :

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x) = -2x + 3$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	

Ainsi f admet un maximum sur $\mathbb{R}$, atteint pour $x = \dfrac{3}{2}$:

c'est $f\left(\dfrac{3}{2}\right) = -\left(\dfrac{3}{2}\right)^2 + 3\left(\dfrac{3}{2}\right) - 2 = -\dfrac{9}{4} + \dfrac{9}{2} - 2 = -\dfrac{9}{4} + \dfrac{18}{4} - \dfrac{8}{4} = \mathbf{\dfrac{1}{4}}$.

c. $f'(x) = a \times 2x + b \times 1 + 0 = 2ax + b$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

On étudie le signe de la fonction affine f' :

$$f'(x) = 0 \iff 2ax + b = 0 \iff 2ax = -b \iff x = -\frac{b}{2a} \text{ car } 2a \neq 0.$$

Si $a > 0$, $2a > 0$ donc :

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
$f'(x) = 2ax + b$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$	$\nearrow$	

Ainsi f admet un minimum sur $\mathbb{R}$:

$$\boldsymbol{f\left(-\frac{b}{2a}\right)} \textbf{ atteint pour } \boldsymbol{x = -\frac{b}{2a}}.$$

Si $a < 0$, $2a < 0$ donc :

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
$f'(x) = 2ax + b$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$	$\searrow$	

Ainsi f admet un maximum sur $\mathbb{R}$:

$$\boldsymbol{f\left(-\frac{b}{2a}\right)} \textbf{ atteint pour } \boldsymbol{x = -\frac{b}{2a}}.$$

On retrouve la propriété sur les variations des fonctions polynôme du second degré vue au chapitre 3.

3 AVEC UNE FONCTION POLYNÔME DE DEGRÉ 3

a. $f'(x) = 3x^2 + a \times 1 = 3x^2 + a \geqslant a > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

b. $f'(x) = 3x^2 - 10 \times 1 = 3x^2 - 1$. On étudie son signe.

f' est une fonction trinôme du second degré :

$$3x^2 - 1 = ax^2 + bx + c \text{ avec } a = 3 \neq 0,\ b = 0 \text{ et } c = -1.$$

Son discriminant est $\Delta = b^2 - 4ac = 0^2 - 4 \times 3 \times (-1) = 12 > 0$.

$f'(x) = 0$ a deux solutions : $x_1 = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ et $x_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Comme $a = 3 > 0$, on en déduit que f admet un maximum local pour $x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$:

x	$-\infty$		$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$		$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$f\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$\searrow$	$f\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$\nearrow$	

$$f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3-\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=-\frac{3\sqrt{3}}{27}+\frac{\sqrt{3}}{3}$$
$$=-\frac{\sqrt{3}}{9}+\frac{3\sqrt{3}}{9}=\frac{2\sqrt{3}}{9}\approx \mathbf{0,38} \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}$$

Un minimum local pour $\boldsymbol{x}=\frac{\sqrt{3}}{3}$:

$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3-\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{27}-\frac{1\sqrt{3}}{3}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{9}-\frac{3\sqrt{3}}{9}=-\frac{2\sqrt{3}}{9}\approx -0,38 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}$$

On peut également factoriser $f'(x)$ pour trouver son tableau de signe :

$$f'(x)=3x^2-1=3\left(x^2-\frac{1}{3}\right)=3\left(x-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)\left(x+\sqrt{\frac{1}{3}}\right)=3\left(x-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(x+\frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$

4 AVEC UNE FONCTION RATIONNELLE

a. $f=\frac{u}{v}$ avec $u(x)=1+x$ et $v(x)=1-x$ deux fonctions polynômes, définies sur $\mathbb{R}$, donc f est définie partout où son dénominateur v est non nul.
Or, $1-x=0 \Leftrightarrow x=1$. Donc $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}=]-\infty\,;1[\cup]1\,;+\infty[$.
u et v sont dérivables sur D et v ne s'annule pas sur D, donc $\boldsymbol{f}$ **est bien dérivable sur D**.

b. Pour $x\in D$,

$$f'(x)=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{(v(x))^2}=\frac{1(1-x)-(1+x)\times(-1)}{(1-x)^2}=\frac{2}{(1-x)^2}.$$

c.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
Signe de f'	+	‖	+
Variations de f	↗	‖	↗

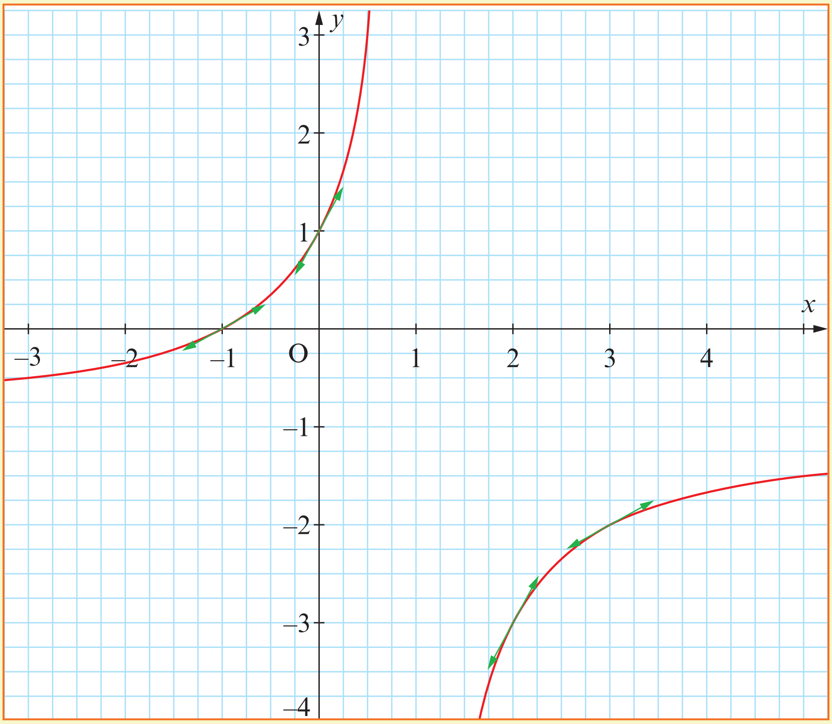
d. f est dérivable en -1 donc la tangente au point d'abscisse -1 de $\mathscr{C}_f$ a pour coefficient directeur le nombre dérivé de f en -1.

$$f'(-1)=\frac{2}{(1-(-1))^2}=\frac{2}{4}=\mathbf{\frac{1}{2}}.$$

Ceci permet de tracer cette tangente.
On calcule de même les coefficients directeurs des tangentes aux points d'abscisses 0, 2 et 3 : $f'(0)=\mathbf{2}$; $f'(2)=\frac{2}{(-1)^2}=\mathbf{2}$ et $f'(3)=\frac{2}{4}=\mathbf{\frac{1}{2}}$.

Pour le tracé des tangentes, voir la méthode 2 du chapitre 4.

On représente la courbe $\mathscr{C}_f$ et les tangentes sous forme de double-flèche :

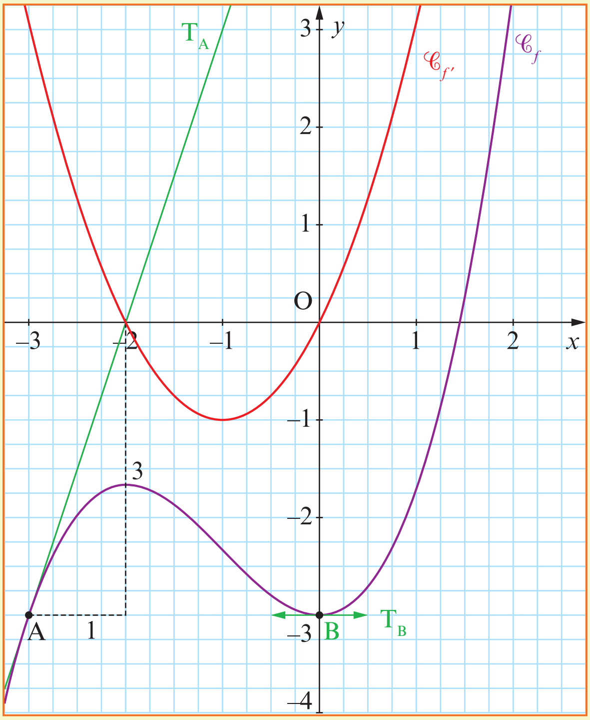


5 LECTURE GRAPHIQUE

a. Les changements de signes de la fonction représentée par $\mathcal{C}_1$ correspondent aux changements de sens de variation de la fonction représentée par $\mathcal{C}_2$.
Il semble donc que $\mathcal{C}_1$ **représente** $\boldsymbol{f'}$ et que $\mathcal{C}_2$ **représente** $\boldsymbol{f}$.
Vérifions :

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
Signe de la fonction représentée par $\mathcal{C}_1$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de la fonction représentée par $\mathcal{C}_2$		↗	$-1{,}7$	↘	-3	↗	

b. Sur $\mathcal{C}_2$, on lit $\boldsymbol{f(-3) = -3}$, donc $A(-3\,;-3)$ et $\boldsymbol{f(0) = -3}$, donc $B(0\,;-3)$.
Sur $\mathcal{C}_1$, on lit $\boldsymbol{f'(-3) = 3}$: c'est le coefficient directeur de T_A .
De même $\boldsymbol{f'(0) = 0}$, donc T_B est horizontale.
(Voir figure page suivante).



6 AIRE MAXIMALE

1. a. (CH) ⊥ (AB) et (MN) ⊥ (AB) donc (CH) // (MN). Dans les triangles AMN et AHC on a donc $\dfrac{\text{AM}}{\text{AH}} = \dfrac{\text{MN}}{\text{HC}}$ d'après le théorème de Thalès.

Ainsi $\dfrac{x}{64} = \dfrac{\text{MN}}{48} \Leftrightarrow \text{MN} = \dfrac{48}{64}x = \dfrac{3}{4}x$.

b. De même dans les triangles BPQ et BCH : $\dfrac{\text{BQ}}{\text{BH}} = \dfrac{\text{PQ}}{\text{CH}}$ donc $\text{BQ} = \text{PQ} \times \dfrac{\text{BH}}{\text{CH}}$.

Or, $\text{PQ} = \text{MN} = \dfrac{3}{4}x$ dans le rectangle MNPQ donc :

$$\text{BQ} = \frac{3}{4}x \times \frac{32}{48} = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3}x = \boldsymbol{\frac{1}{2}x}.$$

2. $x = \text{AM}$ avec M ∈ [AH], donc $x \in [0 ; 64]$.
L'aire du rectangle MNPQ est égale à $\text{MN} \times \text{MQ}$.

Or $\text{MN} = \dfrac{3}{4}x$ et $\text{MQ} = \text{AB} - \text{AM} - \text{BQ} = 96 - x - \dfrac{1}{2}x = 96 - \dfrac{3}{2}x$,

donc cette aire est $f(x) = \dfrac{3}{4}x\left(96 - \dfrac{3}{2}x\right) = \dfrac{3}{4}x \times 96 - \dfrac{9}{8}x^2 = \boldsymbol{-1{,}125x^2 + 72x}$.

3. f est polynomiale, donc dérivable sur [0 ; 64] et sa dérivée est :
$f'(x) = -1{,}125 \times 2x + 72 = -2{,}25x + 72 = ax + b$, avec $a = -2{,}25$ et $b = 72$.

$-2{,}25x + 72 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-72}{-2{,}25} = 32$ et $a < 0$, donc on obtient le signe de la fonction affine f' puis le tableau de variations de f sur [0 ; 64] :

x	0		32		64
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	$1\,152$	↘	0

L'aire du rectangle MNPQ est-elle maximale pour $x = 32$.

7 VARIATIONS ET ENCADREMENT

a. $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = 5x^2 + 19x + 10$ et $v(x) = x + 10$.

u et v sont dérivables (fonctions polynomiales) sur $]-10\,;+\infty[$ et v ne s'y annule pas, donc f est dérivable sur $]-10\,;+\infty[$ et :

$f'(x) = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2}$ pour $x \in\,]-10\,;+\infty[$.

$u'(x) = 5 \times 2x + 19 = 10x + 19$ et $v'(x) = 1$, donc :

$$f'(x) = \frac{(10x+19)(x+10) - (5x^2+19x+10)(1)}{(x+10)^2}$$

$$f'(x) = \frac{10x^2 + 100x + 19x + 190 - 5x^2 - 19x - 10}{(x+10)^2}$$

$$f'(x) = \frac{5x^2 + 100x + 180}{(x+10)^2}$$

$$\boldsymbol{f'(x) = \frac{5}{(x+10)^2} \times (x^2 + 20x + 36).}$$

Comme $\dfrac{5}{(x+10)^2} > 0$ pour $x \in\,]-10\,;+\infty[$, on en déduit que $f'(x)$ a le même signe que $x^2 + 20x + 36$ sur $]-10\,;+\infty[$.

b. $x^2 + 20x + 36 = ax^2 + bx + c$ avec $a = 1 \neq 0$, $b = 20$ et $c = 36$.

Son discriminant est $\Delta = b^2 - 4ac = 20^2 - 4 \times 1 \times 36 = 256 > 0$ donc le trinôme admet deux racines :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-20 - 16}{2} = -18 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-20 + 16}{2} = -2.$$

$a = 1 > 0$ donc le signe de $x^2 + 20x + 36$ est :

x	$-\infty$		-18		-2		$+\infty$
$x^2 + 20x + 36$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit le signe de $f'(x)$ puis les variations de f sur $]-10\,;+\infty[$:

x	-10		-2		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	↘	-1	↗	

c. f est décroissante sur $[-5\,;-2]$, donc si $-5 \leqslant x \leqslant -2$,

$$f(-5) \geqslant f(x) \geqslant f(-2) \Leftrightarrow \boldsymbol{-1 \leqslant f(x) \leqslant 8}.$$

f est croissante sur [–2 ; 10] donc si $-2 \leqslant x \leqslant 10$,

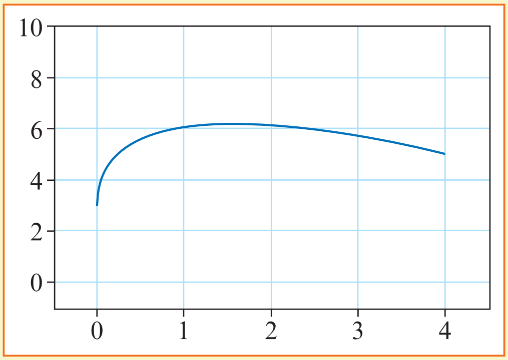
$$f(-2) \leqslant f(x) \leqslant f(10) \Leftrightarrow -1 \leqslant f(x) \leqslant 35.$$

On en déduit : si $x \in$ [–5 ; –10], $\mathbf{-1 \leqslant f(x) \leqslant 35}$.

8 MAXIMUM AVEC TABLEAU ET PYTHON

1. a. On complète les lignes 5 à 7 puis on lance le script :

```
5  x=np.linspace(0,4,100)
6  y=-2*x+3+5*np.sqrt(x)
7  plt.plot(x,y)
```



b. Il semblerait que la fonction g soit strictement croissante sur $[0\,;1{,}5]$, strictement décroissante sur $[1{,}5\,;4]$, et admette sur $[0\,;4]$ un maximum égal à **6,1 atteint pour** $\boldsymbol{x = 1{,}5}$.

2.

```
from math import sqrt
def g(x):
    return -2*x+3+5*sqrt(x)
```

3. a. On recopie partiellement le tableau des valeurs de $g(x)$ pour x allant de 0 à 4 avec un pas de $0{,}1$.
On a arrondi les valeurs de $g(x)$ à 10^{-4} près.

x	0	0,1	…	1,4	1,5	1,6	1,7	…
$g(x)$	3	4,3811	…	6,1161		6,1246	6,1192	…
$g(x) > m$		Vrai	…	Vrai	Vrai	Vrai	Faux	…
m	3	4,3811	…	6,1009	6,1237	6,1246	6,1246	…
alpha		0,1	…	1,4	1,5	1,6	1,6	…

Dès que x dépasse $1{,}7$ on observe que la condition $g(x) > m$ reste fausse, donc que les valeurs de m et *alpha* ne changent plus.

L'algorithme affiche **6,1246** pour m et **1,6** pour *alpha*.
Cela semble légèrement plus précis que notre réponse à la question **1. b**.

b. L'algorithme s'écrit ainsi :

```
from math import sqrt
def g(x):
    return -2*x+3+5*sqrt(x)
x=0
m=g(0)
while x<4:
    x=x+0.1
    if g(x)>m:
        m=g(x)
        alpha=x
print(alpha,m)
```

Son exécution donne : $\boxed{\mathbf{1.6000000000000003 \quad 6.124555320336759}}$

4. La fonction g est dérivable sur $]0\,;4]$ et pour tout $x \in]0\,;4]$,

$$g'(x) = -2 + 0 + 5 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = -2 + \frac{5}{2\sqrt{x}}.$$

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow -2 + \frac{5}{2\sqrt{x}} > 0 \;\Leftrightarrow \frac{5}{2\sqrt{x}} > 2 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} > \frac{4}{5} > 0 \;\Leftrightarrow 0 < \sqrt{x} < \frac{5}{4}$$

car la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$,

donc $g'(x) > 0 \Leftrightarrow x < \left(\frac{5}{4}\right)^2 \Leftrightarrow x < \frac{25}{16}$ car la fonction carré est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

De même, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow -2 + \frac{5}{2\sqrt{x}} = 0 \;\Leftrightarrow \frac{5}{2\sqrt{x}} = 2 \;\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{4}{5} > 0$

$$\Leftrightarrow 0 < \sqrt{x} = \frac{5}{4} \;\Leftrightarrow x = \left(\frac{5}{4}\right)^2 \;\Leftrightarrow x = \frac{25}{16}.$$

g est donc strictement croissante sur $\left[0\,;\frac{25}{16}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\frac{25}{16}\,;4\right]$, donc admet sur $[0\,;4]$ un maximum en $\alpha = \frac{25}{16} = 1{,}5625$ et ce maximum vaut $g\left(\frac{25}{16}\right) = \frac{49}{8} = 6{,}125$. **Ces résultats confortent nos observations précédentes.**

9 COEFFICIENTS INCONNUS

1. Pour tout $x > 0$, $f'(x) = a \times 1 + 0 + c \times \frac{-1}{x^2} = a - \frac{c}{x^2}$.

2. a. $\begin{cases} f(2) = -3 \\ f'(2) = 0 \\ f'(1) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b + \frac{c}{2} = -3 \\ a - \frac{c}{2^2} = 0 \\ a - \frac{c}{1^2} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{4a + 2b + c = -6} \\ \mathbf{4a - c = 0} \\ \mathbf{a - c = 3} \end{cases}$

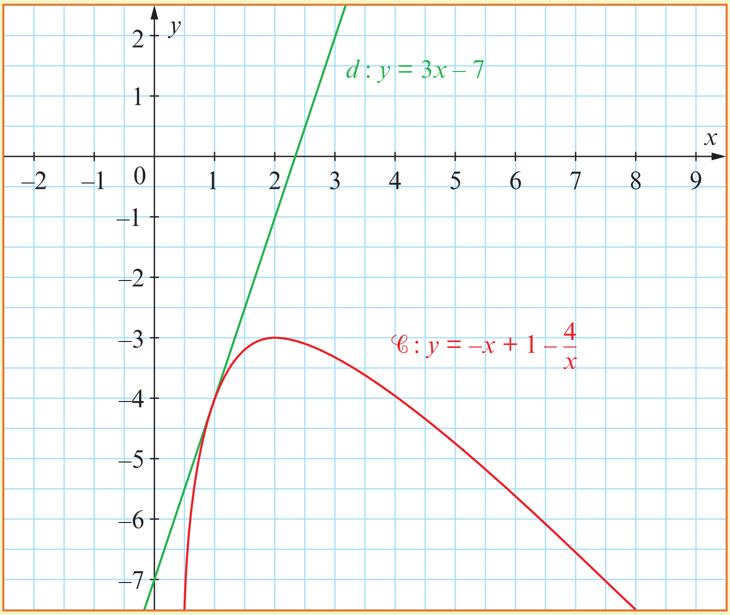
Le troisième système a été obtenu en multipliant les membres de la première équation par 2, et ceux de la seconde équation par 4.

b. $\begin{cases} 4a+2b+c=-6 \\ 4a-c=0 \\ a-c=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a+2b+c=-6 \\ 4a-(a-3)=0 \\ (a-3)=c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a+2b+c=-6 \\ 3a=-3 \\ c=a-3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4a+2b+c=-6 \\ a=-1 \\ c=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4+2b-4=-6 \\ a=-1 \\ c=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{b=1} \\ \boldsymbol{a=-1} \\ \boldsymbol{c=-4} \end{cases}$

c. Donc, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, $\boldsymbol{f(x)=-x+1-\dfrac{4}{x}}$.

Il semble que la fonction corresponde bien au tableau de variations du **1.**, et que la tangente à la courbe au point d'abscisse 1 ait bien pour coefficient directeur 3.



10 FROTTEMENT MINIMAL

1. a. L'aire de la section intérieure est l'aire du rectangle ABCD, égale à $\lambda \times h$.

D'où $\lambda \times h = 0{,}5$, soit $\lambda = \dfrac{0{,}5}{h}$. Donc $\boldsymbol{\lambda = \dfrac{1}{2h}}$.

b. $g(h) = \text{AB} + \text{BC} + \text{CD} = h + \lambda + h = 2h + \lambda$.

D'après **1. a.** : $\boldsymbol{g(h) = 2h + \dfrac{1}{2h}}$.

c. Pour tout $h > 0$, $g'(h) = 2 \times 1 + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{-1}{h^2} = 2 - \dfrac{1}{2h^2}$,

d'où $g'(h) = \dfrac{4h^2-1}{2h^2} = \dfrac{(2h)^2-1^2}{2h^2} = \dfrac{(2h-1)(2h+1)}{2h^2}$

$\boldsymbol{g'(h) = \dfrac{(2h-1)(2h+1)}{2h^2}}$.

d. $2h+1$ et $2h^2$ sont strictement positifs sur $]0\,;+\infty[$.
$g'(h)$ est donc du signe de $2h-1$ sur $]0\,;+\infty[$.

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2h-1$	‖	$-$	0	$+$	
Signe de $g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
Variations de g	‖	↘	2	↗	

2. Le frottement est minimal lorsque $\boldsymbol{h = \frac{1}{2}}$.

Dans ce cas $\lambda = \dfrac{1}{2\times\dfrac{1}{2}}$, soit $\lambda = \mathbf{1}$.

11 POSITIONS RELATIVES

a. Pour tout $x \in D_f$,

$$f'(x) = \frac{2x(x-1)-x^2\times 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2} = \frac{(x-2)x}{(x-1)^2}.$$

b.

x	$-\infty$				1		2		$+\infty$
$(x-2)$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
x		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$(x-1)^2$		$+$	|	$+$	0	$+$	|	$+$	
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
Variations de f		↗	0	↘	‖	↘	4	↗	

c. Soit x un réel, $x \neq 1$, alors :

$$x+1+\frac{1}{x-1} = \frac{(x+1)(x-1)+1}{x-1} = \frac{x^2-1+1}{x-1} = \frac{x^2}{x-1} = f(x).$$

$$\boldsymbol{x+1+\frac{1}{x-1} = f(x)}.$$

d. Pour tout $x \neq 1$, $f(x)-g(x) = \left(x+1+\dfrac{1}{x-1}\right)-(x+1) = \dfrac{1}{x-1}$.

$1>0$, donc $f(x)-g(x)$ est du même signe que $x-1$. D'où :

$$f(x)-g(x)>0 \Leftrightarrow x-1>0 \Leftrightarrow x>1\ ;$$
$$f(x)-g(x)<0 \Leftrightarrow x-1<0 \Leftrightarrow x<1.$$

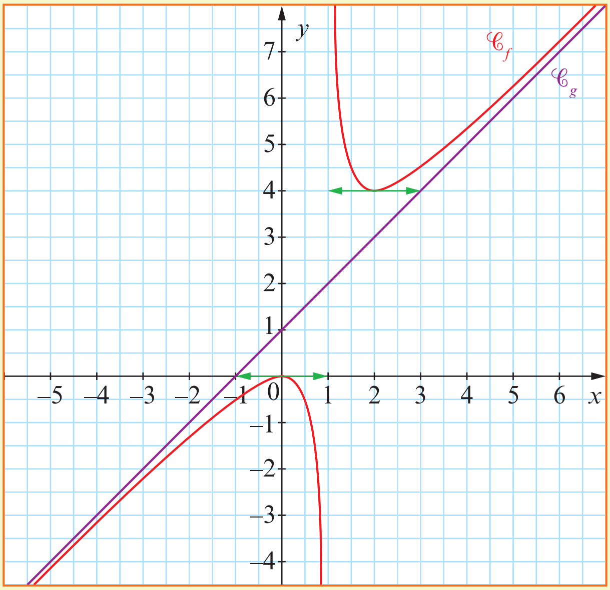
Par conséquent :

$\mathscr{C}_f$ **est strictement au-dessus de** $\mathscr{C}_g$ **sur l'intervalle** $]\mathbf{1}\,;+\infty[$;

$\mathscr{C}_f$ **est strictement en dessous de** $\mathscr{C}_g$ **sur l'intervalle** $]-\infty\,;\mathbf{1}[$.

Les courbes de *f* et de *g* ne se rencontrent jamais.

e.



Il y a deux tangente horizontales correspondant aux extremum locaux aux points d'abscisses 0 et 2.

12 QCM

1. Réponse c. f est strictement croissante sur $]-\infty\,;-3]$ et f' ne s'annule qu'en -3 et $0{,}8$, là où la tangente à la courbe de f est horizontale.

2. Réponse b. $f'(2)=9$ car T passe par les points de coordonnées $(2\,;\,1)$ et $(3\,;\,10)$.

3. Réponse c. C'est une tangente horizontale dont l'équation est de la forme $y=$constante.

4. Réponse b. $y=9x-17$ est l'équation de T.

Voir la méthode 2 du chapitre 4.

$f(2)=1=9\times 2-17$ et pour tout x de $[0\,;5]$ autre que 2, $f(x)>9x-17$.
Donc sur $[0\,;5]$, $f(x)\leqslant 9x-17 \Leftrightarrow x=2$.

5. Réponse d. f est strictement décroissante sur $[-3\,;0{,}8]$ et f' ne s'annule qu'en -3 et $0{,}8$. Sur $]-\infty\,;-3[$ et sur $]0{,}8\,;+\infty[$, $f'(x)>0$.

13 UN TRIANGLE D'AIRE MINIMALE

Partie A. 1. Pour tout $x>2$:

$$f'(x)=1+0+4\times\frac{-1}{(x-2)^2}=1-\frac{4}{(x-2)^2}=\frac{(x-2)^2-4}{(x-2)^2}$$

$$f'(x)=\frac{((x-2)+2)\times((x-2)-2)}{(x-2)^2}=\frac{x(x-4)}{(x-2)^2}.$$

Autre méthode : $(x-2)^2-4=x^2-4x+4-4=x^2-4x=x(x-4)$.

2.

x	2		4		$+\infty$
x		$+$		$+$	
$(x-4)$		$-$	0	$+$	
$(x-2)^2$	0	$+$		$+$	
Signe de $f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
Variations de f	$\Vert$	$\searrow$	8	$\nearrow$	

Partie B. 1. Première méthode :

Comme $y_N > 0$, $y_N = \text{ON}$, or (IP) // (ON) donc d'après le théorème de Thalès dans les triangles MIP et MON : $\dfrac{\text{IP}}{\text{ON}} = \dfrac{\text{IM}}{\text{OM}}$, soit $\dfrac{1}{\text{ON}} = \dfrac{x-2}{x}$, d'où :

$$\mathbf{ON} = \boldsymbol{\frac{x}{x-2}}.$$

Deuxième méthode :

Soit $\text{N}(0\,;y_N)$.

$\text{N} \in (\text{PM})$ donc $\overrightarrow{\text{MN}}$ et $\overrightarrow{\text{PM}}$ sont colinéaires.

Puisque $\overrightarrow{\text{MN}}(-x\,;y_N)$ et $\overrightarrow{\text{PM}}(x-2\,;-1)$: $-x(-1)-y_N(x-2)=0$,

soit $x = y_N(x-2)$. Donc, puisque $x-2 \neq 0$, $\boldsymbol{y_N = \dfrac{x}{x-2}}$.

Cette méthode utilise les connaissances de Seconde sur la colinéarité.

2. OMN est rectangle en O, donc $\mathscr{A}(x) = \dfrac{\text{OM} \times \text{ON}}{2} = \dfrac{1}{2}x \times y_N = \dfrac{1}{2}\dfrac{x^2}{x-2}$.

Il reste à vérifier que, pour tout $x > 2$, $f(x) = \dfrac{x^2}{x-2}$:

$$f(x) = x+2+\frac{4}{x-2} = \frac{(x+2)(x-2)+4}{x-2} = \frac{x^2-2^2+4}{x-2} = \frac{x^2}{x-2}.$$

On a donc bien, pour tout $x > 2$:

$$\boldsymbol{\mathscr{A}(x) = \frac{1}{2}f(x)}.$$

3. Pour $x > 2$, $\text{A}'(x) = \dfrac{1}{2}f'(x)$.

Or $\dfrac{1}{2} > 0$, donc la fonction $\mathscr{A}$ est de même sens de variation que f.

Elle admet donc un minimum en $x = 4$ qui vaut $\mathscr{A}(4) = \dfrac{1}{2}f(4) = \dfrac{1}{2} \times 8 = 4$.

- Pour construire le triangle OMN d'aire minimale, il faut donc dans l'ordre :

– construire un repère orthonormal $(\text{O}\,;\vec{i}, \vec{j})$,
– placer les points $\text{P}(2\,;1)$ et $\text{I}(2\,;0)$,
– placer le point $\text{M}(4\,;0)$,
– construire le point N, intersection de (MP) avec l'axe des ordonnées.

14 PROBLÈME

1. AB = AC = 10 donc B et C appartiennent au cercle de centre A et de rayon 10. Les points B et C représentent les extrémités des branches du compas, qui sont posées sur la table.
Donc B et C appartiennent à l'axe des abscisses.
Donc B et C sont les points d'intersection du cercle de centre A et de rayon 10, avec l'axe des abscisses (droite d'équation $y = 0$).

2. a. $\boldsymbol{t \in [0\,;\,10]}$.

b. • Dans AOC rectangle en O, le théorème de Pythagore donne :

$$\mathrm{OA}^2+\mathrm{OC}^2=\mathrm{AC}^2$$

$$t^2+\mathrm{OC}^2=10^2.$$

D'où $\mathrm{OC}^2 = 100 - t^2$, et comme $\mathrm{OC} > 0$, $\mathrm{OC} = \sqrt{100 - t^2}$.
L'aire du triangle AOC vaut :

$$\frac{\mathrm{OA}\times\mathrm{OC}}{2}=\frac{t\times\sqrt{100-t^2}}{2}.$$

• B étant le symétrique de C par rapport à la droite (OA), l'aire de ABC est le double de l'aire de AOC.

D'où $f(t) = 2\times\dfrac{t\sqrt{100-t^2}}{2} = t\times\sqrt{100-t^2}$.

Mais, comme $t > 0$, $t = \sqrt{t^2}$ et :

$$f(t)=\sqrt{t^2}\times\sqrt{100-t^2}=\boldsymbol{\sqrt{t^2(100-t^2)}}.$$

3. a. Pour tout $t \in [0\,;\,10]$:

$$u'(t) = 2t(100-t^2)+t^2(0-2t) = 2t(100-t^2)-2t\times t^2$$

$$u'(t) = 2t\left[(100-t^2)-t^2\right] = 2t\left[100-2t^2\right] = 4t\left(50-t^2\right).$$

Puis, en appliquant la 3e identité remarquable :

$$u'(t)=4t(\sqrt{50}-t)(\sqrt{50}+t)$$

$$\boldsymbol{u'(t)=4t(5\sqrt{2}-t)\times(5\sqrt{2}+t)}.$$

b.

t	0		$5\sqrt{2}$		10
$4t$	0	+		+	
$5\sqrt{2}-t$		+	0	–	
$5\sqrt{2}+t$		+		+	
Signe de $u'(t)$	0	+	0	–	
Variations de u	0	↗	2 500	↘	0

4. On en déduit :

x	0		$5\sqrt{2}$		10
Variations de $f=\sqrt{u}$	0	↗	50	↘	0

5. • f est maximale en $t = 5\sqrt{2}$, et $f(5\sqrt{2}) = 50$.
L'aire du triangle ABC est donc maximale lorsque $OA = 5\sqrt{2}$, et cette aire maximale vaut 50 cm^2.

• Dans AOC rectangle en O : $\cos(\widehat{OAC}) = \dfrac{OA}{AC} = \dfrac{5\sqrt{2}}{10} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Donc $\widehat{OAC} = \dfrac{\pi}{4}$ (radians).

Voir le chapitre 9 de trigonométrie.

• (AO) est axe de symétrie du triangle ABC ; (AO) est donc aussi la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$.

D'où $\widehat{BAC} = 2 \times \widehat{OAC} = 2 \times \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$ (radians).

L'aire du triangle ABC est donc maximale lorsque les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires.

15 FONCTION RATIONNELLE

Partie A. 1. f est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec $u : x \mapsto x^3 + 2x^2$ et $v : x \mapsto (x+1)^2$.
Pour tout $x \neq -1$, $v(x) = x^2 + 2x + 1$, donc $v'(x) = 2x + 2 = 2(x+1)$ d'où :

$$f'(x) = \frac{(3x^2 + 4x)(x+1)^2 - (x^3 + 2x^2) \times 2(x+1)}{(x+1)^4}$$

$$= \frac{(3x^2 + 4x)(x+1) - (x^3 + 2x^2) \times 2}{(x+1)^3}$$

$$= \frac{x^3 + 3x^2 + 4x}{(x+1)^3}$$

$$\boldsymbol{f'(x) = \frac{x(x^2 + 3x + 4)}{(x+1)^3}}.$$

2. Le discriminant de $x^2 + 3x + 4$ est $\Delta = -7 < 0$, donc $x^2 + 3x + 4$ est du signe de $a = 1 > 0$ sur $\mathbb{R}$, donc strictement positif pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3. D'après les propriétés rappelées dans l'énoncé :
$(x+1)^3 < 0 \Leftrightarrow x + 1 \in]-\infty\,; 0[\Leftrightarrow x + 1 < 0 \Leftrightarrow x < -1$;
$(x+1)^3 = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$;
$(x+1)^3 > 0 \Leftrightarrow x + 1 \in]0\,; +\infty[\Leftrightarrow x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$.

4.

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
x		$-$	|	$-$	0	$+$	
$(x^2 + 3x + 4)$		$+$	|	$+$	|	$+$	
$(x + 1)^3$		$-$	0	$+$	|	$+$	
Signe de $f'(x)$		$+$	||	$-$	0	$+$	
Variations de f		↗	||	↘	0	↗	

Partie B. 1. • $f(-2) = \dfrac{-8+8}{1} = 0$ et $f'(-2) = \dfrac{(-2)(4-6+4)}{-1} = 4$ donc :

$$T_1 : y = 0 + 4(x+2), \text{ soit } \mathbf{T_1 : y = 4x + 8}.$$

• $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\frac{3}{8}}{\frac{1}{4}} = \dfrac{3}{2}$ et $f'\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{-\frac{1}{2} \times \frac{11}{4}}{\frac{1}{8}} = -11$ donc :

$$T_2 : y = \frac{3}{2} - 11\left(x + \frac{1}{2}\right), \text{ soit } \mathbf{T_2 : y = -11x - 4}.$$

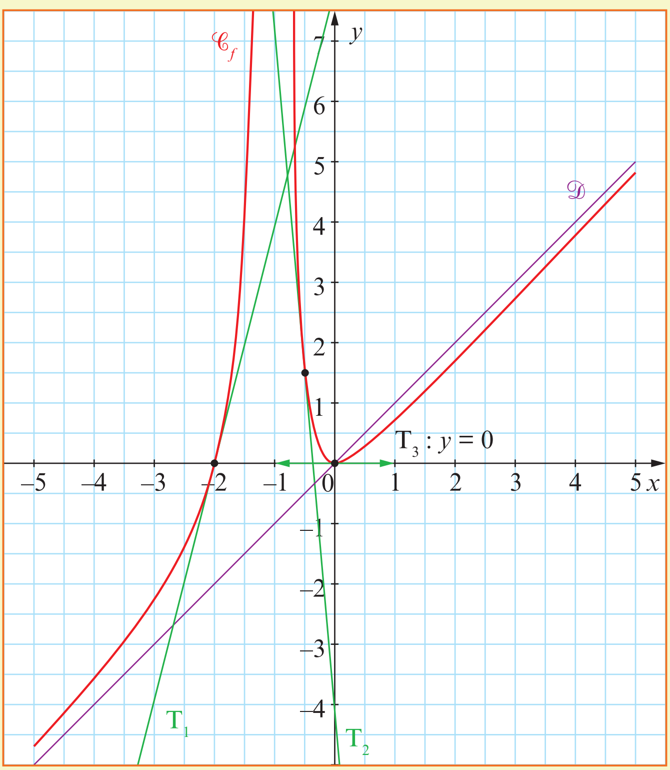
• $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$ donc $\mathbf{T_3 : y = 0}$.

2. $f(x) - x = \dfrac{x^3 + 2x^2}{(x+1)^2} - \dfrac{x(x+1)^2}{(x+1)^2} = \dfrac{-x}{(x+1)^2}$.

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$-x$		+	|	+	0	–	
$(x+1)^2$		+	0	+	|	+	
Signe de $f(x) - x$		+	‖	+	0	–	

$\mathscr{C}_f$ est strictement au-dessus de $\mathscr{D}$ sur $]-\infty\,;-1[$ et sur $]-1\,;0[$;
$\mathscr{C}_f$ est strictement en dessous de $\mathscr{D}$ sur $]0\,;+\infty[$;
$\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{D}$ se coupent au point de coordonnées $(0\,;0)$.

3.



16 VOLUME D'UN CÔNE

Partie A. 1. f est de la forme $\frac{u}{v}$ avec : $u(x) = x^4$ et $v(x) = x^2 - 1$.
f est donc définie là où v ne s'annule pas.
Or : $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -1$.
Donc $D_f = \mathbb{R} / \{-1;1\}$ ($\mathbb{R}$ privé de $\{-1;1\}$), soit :

$$\mathbf{D_f =]-\infty\,;-1[\cup]-1\,;1[\cup]1\,;+\infty[.}$$

2. f est également dérivable sur D_f et :

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2}.$$

Or $u'(x) = 4x^3$ et $v'(x) = 2x$.

Donc, pour tout $x \notin \{-1\,;1\}$:

$$f'(x) = \frac{4x^3 \times (x^2-1) - x^4 \times 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{4x^5 - 4x^3 - 2x^5}{(x^2-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^5 - 4x^3}{(x^2-1)^2} = \mathbf{\frac{2x^3(x^2-2)}{(x^2-1)^2}}.$$

3. • $x^2 - 2 = (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$.
Donc $x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt{2}$ ou $x = \sqrt{2}$ et $x^2 - 2$ est du signe de $a = 1 > 0$ sur $]-\infty\,;-\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}\,;+\infty[$ et du signe de $-a < 0$ sur $]-\sqrt{2};\sqrt{2}[$.
• $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x = -1$ ou $x = 1)$ donc pour tout x réel différent de -1 et 1, $(x^2-1)^2 > 0$.
À l'aide du signe de x^3, on en déduit :

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		-1		0		1		$\sqrt{2}$		$+\infty$
x^3		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
x^2-2		$+$	0	$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x^2-1)^2$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	0	$+$		$+$	
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
Variations de f		↘	4	↗	‖	↗	0	↘	‖	↘	4	↗	

4. La courbe représentative de f est $\mathscr{C}_1$.

Partie B. 1. a. • Dans le triangle BOH, rectangle en H :

$$\widehat{B} + \widehat{O} + \widehat{H} = 180°, \text{ soit } \widehat{BOH} = 180° - \widehat{OBH} - 90° = 90° - \widehat{OBH}.$$

• Dans le triangle ABC, rectangle en A :

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180°, \text{ soit } \widehat{BCA} = 180° - 90° - \widehat{ABC} = 90° - \widehat{ABC}.$$

Or, $O \in [BA]$ et $H \in [BC]$, donc $\widehat{OBH} = \widehat{ABC}$ (il s'agit du même angle).

Donc : $\widehat{BOH} = 90° - \widehat{OBH} = 90° - \widehat{ABC}$ et ainsi $\widehat{BOH} = \widehat{BCA}$.

b. • Dans le triangle BOH rectangle en A,

$$\tan\alpha = \tan\widehat{BOH} = \frac{\text{opposé}}{\text{adjacent}} = \frac{BH}{OH}.$$

• Dans le triangle ABC rectangle en A, $\tan\alpha = \tan\widehat{BCA} = \dfrac{BA}{AC}$.

• D'où $\dfrac{BH}{OH} = \dfrac{BA}{AC}$, qui équivaut à $BH \times AC = BA \times OH$.

Puis, en élevant au carré les deux membres de l'égalité :

$$BH^2 \times AC^2 = BA^2 \times OH^2.$$

c. On a donc $BH^2 \times x^2 = h^2 \times 1^2$.

Or, d'après le théorème de Pythagore dans BOH rectangle en H :

$$\begin{aligned} BH^2 = OB^2 - OH^2 &= (h-1)^2 - 1^2 \\ &= (h^2 - 2h + 1) - 1 \\ &= h^2 - 2h. \end{aligned}$$

• Finalement :

$$\begin{aligned} (h^2 - 2h)x^2 = h^2 &\Leftrightarrow h^2(x^2-1) - 2hx^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow h\left[h(x^2-1) - 2x^2\right] = 0 \\ &\Leftrightarrow h = 0 \text{ ou } h(x^2-1) - 2x^2 = 0. \end{aligned}$$

Or, $h \neq 0$ car $h > 2$ d'où : $h(x^2-1) = 2x^2$.

$x > 1$, d'où $x^2 - 1 > 0$ donc : $\boldsymbol{h = \dfrac{2x^2}{x^2-1}}$.

2. a. • La base du cône est un disque de rayon $AC = x$.

Son aire vaut donc πx^2.

• $V(x) = \dfrac{1}{3} \times \pi x^2 \times h = \dfrac{1}{3} \times \pi x^2 \times \dfrac{2x^2}{x^2-1}$.

D'où, pour tout $x > 1$:

$$\boldsymbol{V(x) = \frac{2\pi}{3} \times \frac{x^4}{x^2-1} = \frac{2\pi}{3} f(x)}.$$

b. D'après la question **3.** de la **Partie A**, sur $]1\,;+\infty[$, f admet un minimum en $x = \sqrt{2}$ qui vaut 4.

Le coefficient $\dfrac{2\pi}{3}$ étant strictement positif, $V = \dfrac{2\pi}{3} f$ est également minimal sur $]1\,;+\infty[$ lorsque $x = \sqrt{2}$.

c. Dans ABC rectangle en A, $\tan\widehat{ABC} = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{x}{h}$.

Lorsque $x = \sqrt{2}$:

$$h = \frac{2\sqrt{2}^2}{\sqrt{2}^2 - 1} = \frac{4}{1} = 4, \text{ d'où } \tan\widehat{ABC} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Donc à 0,1 degré près : $\boldsymbol{\widehat{ABC} \approx 19{,}5°}$.

6 La fonction exponentielle

I DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS

THÉORÈME-DÉFINITION :

Il existe une unique fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$f(0) = 1 \text{ et } f' = f.$$

La fonction ainsi définie s'appelle **fonction exponentielle** et on la note exp.

- $\exp(0) = 1$.
- La fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\exp' = \exp$.

PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES :

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) \times \exp(-x) = 1 \Leftrightarrow \exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$.

Voir la démonstration dans l'exercice 7.

- Pour tout couple $(x\,;\,y) \in \mathbb{R}^2$: $\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) > 0$.

PROPRIÉTÉ :

Pour tout réel a, la suite $(\exp(na))$, $n \in \mathbb{N}$, est une suite géométrique de raison $\exp(a)$ et de premier terme 1.

Voir la démonstration dans l'exercice 13.

NOUVELLE NOTATION :

On pose $\exp(1) = \mathrm{e}$. En conséquence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\exp(n) = \mathrm{e}^n$.
Et plus généralement, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) = \mathrm{e}^x$.
Alors, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^y\,;\; \mathrm{e}^{-x} = \frac{1}{\mathrm{e}^x}\,;\; (\mathrm{e}^x)^n = \mathrm{e}^{nx}}$$

II ÉTUDE DE LA FONCTION EXPONENTIELLE

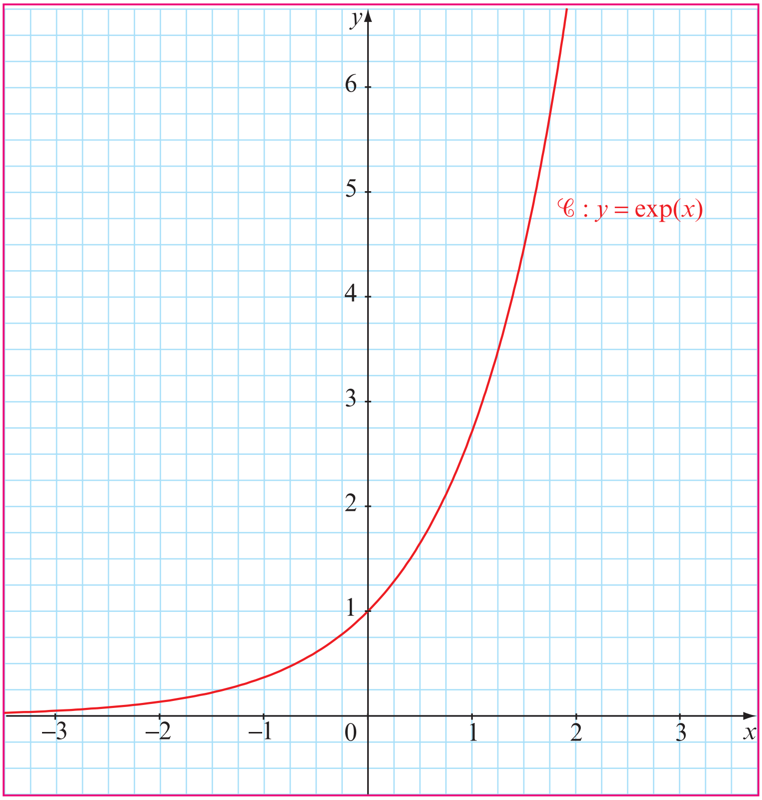
VARIATIONS :

La fonction exponentielle est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.

Conséquence : pour tous réels x et y :

$$\boxed{x < y \Leftrightarrow \mathrm{e}^x < \mathrm{e}^y \;;\; \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^y \Leftrightarrow x = y}$$

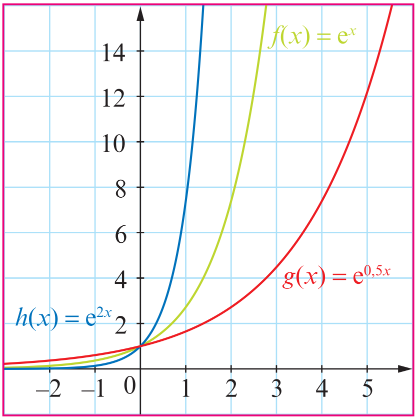
COURBE REPRÉSENTATIVE :



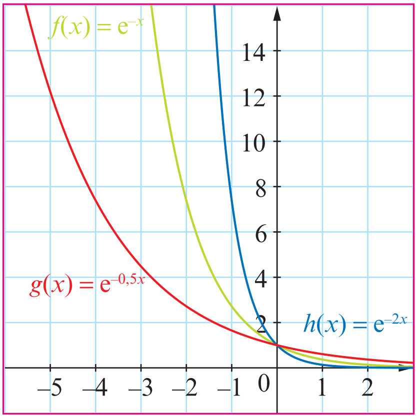
III CROISSANCE ET DÉCROISSANCE EXPONENTIELLE

La croissance des courbes représentatives de fonctions exponentielles est plus ou moins rapide en fonction du facteur k de l'exponentielle :
Soit k un réel strictement positif.

- Fonctions $x \mapsto e^{kx}$
  Plus k est grand, plus la croissance est rapide.



- Fonctions $x \mapsto e^{-kx}$
  Plus k est grand, plus la décroissance est rapide.



MÉTHODE 1

Réduire des expressions à l'aide des propriétés algébriques

➜ Voir les exos 1, 11, 13 et 14.

Étape 1. Faire apparaître un produit ou un quotient d'exponentielles.
Étape 2. Utiliser les formules « propriétés algébriques ».
Étape 3. Simplifier l'expression obtenue si besoin.

Exo résolu

Montrer que : $\dfrac{e^9 \times e}{(e^3)^2} = (e^2)^2$.

CORRIGÉ

Étape 1. $e = e^1$, donc : $\dfrac{e^9 \times e}{(e^3)^2} = \dfrac{e^9 \times e^1}{e^3 \times e^3}$

Étape 2. On utilise $e^x \times e^y = e^{x+y}$ au numérateur et au dénominateur, puis $\dfrac{1}{e^x} = e^{-x}$:

$$\frac{e^9 \times e}{(e^3)^2} = \frac{e^{9+1}}{e^{2\times 3}} = e^{10} \times \frac{1}{e^6} = e^{10} \times e^{-6} = e^{10-6} = e^4.$$

D'autre part : $(e^2)^2 = e^{2\times 2} = e^4$.

Conclusion : $\dfrac{e^9 \times e}{(e^3)^2} = (e^2)^2$.

MÉTHODE 2

Résoudre une (in)équation avec des exponentielles

➜ Voir les exos 2, 11 et 13.

Étape 1. Se ramener à la forme $e^A \geqslant e^B$ (ou $e^A = e^B$)
Étape 2. Appliquer la conséquence du paragraphe II.

Exo résolu

Résoudre l'inéquation : $\dfrac{e^{3x^2}}{e^{6x}} \geqslant 1$.

CORRIGÉ

Étape 1. On utilise les propriétés algébriques $\dfrac{1}{e^x} = e^{-x}$ puis $e^x \times e^y = e^{x+y}$ et $e^0 = 1$:

$$\frac{e^{3x^2}}{e^{6x}} \geqslant 1 \Leftrightarrow e^{3x^2} \times \frac{1}{e^{6x}} \geqslant 1 \Leftrightarrow e^{3x^2} \times e^{-6x} \geqslant 1 \Leftrightarrow e^{3x^2-6x} \geqslant e^0 .$$

Autre méthode

Une exponentielle est toujours strictement positive, en multipliant les deux membres de l'inéquation par e^{6x}, le sens de l'inégalité ne change pas et on obtient : $\dfrac{e^{3x^2}}{e^{6x}} \geqslant 1 \Leftrightarrow e^{3x^2} \geqslant e^{6x}$.

Étape 2. La fonction exponentielle étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on obtient :

$$3x^2 - 6x \geqslant 0 \Leftrightarrow 3x(x-2) \geqslant 0.$$

Avec la seconde méthode : $3x^2 \geqslant 6x \Leftrightarrow 3x(x-2) \geqslant 0$.

Il s'agit d'une inéquation du second degré.
Le trinôme du second degré $3x^2 - 6x = 3x(x-2)$ est positif $(a = 3)$ à l'extérieur des racines, d'où le tableau de signes :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
Signe de $3x(x-2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit les équivalences suivantes :

$$\frac{e^{3x^2}}{e^{6x}} \geqslant 1 \Leftrightarrow 3x(x-2) \geqslant 0 \Leftrightarrow (x \leqslant 0 \text{ ou } x \geqslant 2).$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation $\dfrac{e^{3x^2}}{e^{6x}} \geqslant 1$ est :

$$\mathbf{]-\infty\,;0] \cup [2\,;+\infty[}.$$

MÉTHODE 3

Étudier une fonction *f* où figure une exponentielle

→ **Voir les exos 3, 4, 5, 8, 9, 11 et 12.**

Étape 1. Identifier la forme de la fonction f à dériver : est-ce une somme, un produit, un quotient ?

Étape 2. Utiliser la ou les formules du cours du chapitre 4.

On reverra avec profit la méthode 3 du chapitre 4.

Étape 3. Réduire et factoriser la formule obtenue si possible

On factorise la dérivée car un produit de deux facteurs est de signe positif si les 2 facteurs sont du même signe, et il est négatif si les deux facteurs sont de signes opposés.
De plus, une exponentielle est toujours positive.

Étape 4. Déduire le signe de la dérivée f' et les variations de la fonction f.

Exo résolu

Étudier les variations des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$:

a. $f(x) = 2xe^x$

b. $g(x) = 3e^{-x-2}$

c. $h(x) = \dfrac{x}{e^x} + 3$

CORRIGÉ

a. Étape 1. f est de la forme $u \times v$ avec $u(x) = 2x$ et $v(x) = e^x$.
Alors $u'(x) = 2$ et $v'(x) = e^x$.

> On rappelle que $(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$.

Étape 2. Pour tout x réel : $f'(x) = 2 \times e^x + 2x \times e^x$.
Étape 3. $f'(x) = (2+2x)e^x$.
Étape 4. Pour tout x réel, $e^x > 0$, donc $f'(x)$ a le même signe que $2+2x$.
D'où le tableau suivant :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$-2e^{-1}$	$\nearrow$	

b. Étape 1. g est de la forme ke^{ax+b} avec $ax + b = -x - 2$.

> $(f(ax+b))' = a \times f'(ax+b)$ où f (et f' !) est la fonction exponentielle.

Étape 2. Pour tout x réel :

$$g'(x) = 3 \times (-1) \times e^{-x-2} = -3e^{-x-2}.$$

Étape 3. g est déjà sous forme d'un produit.
Étape 4. Pour tout x réel, $e^{-x-2} > 0$ donc $g'(x)$ a le signe de -3, c'est-à-dire négatif.
D'où le tableau suivant :

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$		$\searrow$	

c. Étape 1. h est la somme d'une constante (de dérivée nulle) et d'une fonction de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = x$ et $v(x) = e^x$.
Alors $u'(x) = 1$ et $v'(x) = e^x$.

> On rappelle que $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$.

Étape 2. Pour tout x réel :

$$h'(x) = \frac{1 \times e^x - x \times e^x}{(e^x)^2}.$$

Étape 3. $h'(x) = \dfrac{(1-x) \times e^x}{(e^x)^2} = \dfrac{1-x}{e^x}$.

Étape 4. Pour tout x réel, $e^x > 0$, donc $h'(x)$ a le même signe que $1-x$, qui s'annule pour $x = 1$.

D'où le tableau suivant :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$e^{-1} + 3$	$\searrow$	

$h(1) = \dfrac{1}{e^1} + 3 = \dfrac{1}{e} + 3$ mais $\dfrac{1}{e^1} = e^{-1}$: on peut mettre dans le tableau n'importe laquelle des deux écritures.

TESTER SES CONNAISSANCES

1 RELATION FONCTIONNELLE
★ | 10 min | ▶ P. 183

1. Simplifier au maximum les expressions suivantes :

a. $1-\left(\left(e^{\frac{3}{2}}\right)\times e^{-3}\right)^2\times e^3$ **b.** $(e^x)^3(e^{2x}-e^{-3x})$

c. $\dfrac{e^5+e^2}{e^2}-\dfrac{e}{(e^{-1})^2}$ **d.** $e^{(3x+1)^2}\times e^{-6x}-e$

Voir la méthode 1 ; il faudra développer pour pouvoir simplifier.
Ne pas oublier qu'il faut des produits pour pouvoir simplifier un quotient : $\dfrac{a\times b}{c\times b}=\dfrac{a}{c}$.

2. Démontrer l'égalité : $\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}=\dfrac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$.

2 (IN) ÉQUATIONS
★★ | 20 min | ▶ P. 183

Résoudre les équations ou inéquations suivantes :

a. $e^{-2x}=0$ **b.** $e^{2x-3}<1$

Voir la méthode 2.

c. $e^{x(x-1)}>e^{3x+1}$ **d.** $4e^{2x}-3e^{x+1}-e^2=0$

Poser $X=e^x$ et résoudre l'équation du second degré d'inconnue X.

3 ÉTUDES DE VARIATIONS
★ | 25 min | ▶ P. 184

Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes et en déduire le sens de variation.

a. $f(x)=e^{-x}$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Voir la méthode 3.

b. $g(x)=(2-x)e^{2x+1}$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

c. $h(x)=\dfrac{-3}{e^x+2}$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

d. $k(x)=\left(-5-2e^{\frac{x}{2}}\right)^2$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$e^{\frac{x}{2}}=e^{\frac{1}{2}\times x}$ donc on aura besoin de la dérivée de e^{ax+b}.

4 TANGENTE À $\mathscr{C}$ AU POINT D'ABSCISSE 0 | ★ | 15 min | ▶ P. 185

Dans un repère $(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,;\vec{j})$, on note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction exp.

a. Déterminer l'équation réduite de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

b. Étudier les variations, puis le signe de la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^x - x - 1\,.$$

c. En déduire la position relative des courbes $\mathscr{C}$ et T.

S'ENTRAÎNER

5 ÉTUDE DE FONCTION | ★★ | 40 min | ▶ P. 185

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x+1} + c$, où c désigne un réel fixé.

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1. Sachant que $f(0) = \dfrac{1}{2}$, déterminer c.

2. Étudier le signe de $f'(x)$ lorsque x décrit $\mathbb{R}$, puis dresser le tableau de variations de f.

3. a. Comparer le minimum sur $\mathbb{R}$ de la fonction f à la valeur -1.

b. Combien -1 a-t-il d'antécédents par f ?

4. a. Résoudre l'équation $\dfrac{1}{2}X^2 - \mathrm{e}X = 0$.

b. En déduire le nombre d'antécédents par f de e.

5. Représenter $\mathscr{C}_f$ sur l'intervalle [–4 ; 4] en faisant apparaître la tangente horizontale.

6 ANTÉCÉDENTS PAR LA FONCTION EXP | ★★★ | 45 min | ▶ P. 187

1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^{-x}$.

a. Déterminer la fonction g' dérivée de g.

b. Démontrer que g est constante, et que $g(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

c. En déduire que $\mathrm{e}^x \neq 0$ quel que soit le réel x.

2. En remarquant que $x = \dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{2}$, démontrer que $(\mathrm{e}^x)' > 0$ quel que soit le réel x.

En déduire que la fonction exponentielle ne s'annule pas, puis qu'elle est strictement positive et croissante sur $\mathbb{R}$.

3. Démontrer que, pour tout réel strictement positif y, si l'équation $\mathrm{e}^x = y$ a une solution dans $\mathbb{R}$, alors cette solution est unique.

On pourra supposer qu'il existe deux réels x et x' ayant la même image et aboutir à une contradiction.

On notera $\ln(y)$ cette solution.

4. Déterminer les valeurs de $\ln(\mathrm{e})$, de $\ln(1)$ et de $\ln(\mathrm{e}^3)$.

5. On écrit l'algorithme suivant en python permettant de déterminer une valeur approchée de ln(5) en examinant des listes de valeurs de la fonction exponentielle avec des pas qui diminuent :

```
from math import*
x = 0
for n in range (0,5):
    L = [exp(x+i/10**n) for i in range (10)]
    print(L)
    for k in range (1,10):
        if L[k]<5:
            x=x+1/10**n
print ("Une valeur approchée de ln(5) est", x)
```

a. Programmer cet algorithme et donner la valeur obtenue pour ln(5).

b. Quelle est la précision de la valeur approchée obtenue ?
Justifier à l'aide d'une instruction de l'algorithme.

7 RADIOACTIVITÉ

★★ | 20 min | ▸ P. 188

On veut étudier le phénomène de décroissance radioactive.
Le nombre $N(t)$ de noyaux radioactifs présents à l'instant t est donné par $N(t) = \mathrm{N}_0\mathrm{e}^{-\lambda t}$, λ étant la constante radioactive positive, $\mathrm{N}_0 = N(0)$ et t est exprimé en années.

1. Montrer que $N'(t)$ est proportionnel au nombre de noyaux radioactifs $N(t)$, et donner le coefficient de proportionnalité.

2. La période T représentant le temps au bout duquel la moitié des noyaux radioactifs présents se sont désintégrés, exprimer T en fonction de λ.

> Pour résoudre la question, il sera nécessaire d'écrire : $2 = \exp(\ln 2) = \mathrm{e}^{\ln 2}$, puis on montrera que $T = \dfrac{\ln 2}{\lambda}$ (voir l'exercice 6).

3. Application numérique : datation au carbone 14.

a. La période du carbone 14 est de 5 730 ans.
Que vaut la constante radioactive λ ?

b. On a trouvé en 2006 dans un site archéologique des ossements humains dont la teneur en carbone 14 est égal à 35 % de celle des os d'un être humain en vie.
Estimer la date de la mort de cet humain.

c. La période du carbone 14 n'est précise qu'à 40 ans près.
Affiner l'estimation précédente par un encadrement de la date de mort de cet humain.

8 ÉTUDE DE FONCTION ET DICHOTOMIE | ★★★ | 50 min | ▶ P. 188

Soit f la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = e^x - \frac{x^2}{2} - 2x - 2,$$

et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$.

1. Déterminer la fonction f' dérivée de la fonction f.

2. a. Étudier les variations de la fonction f'.

b. Calculer $f'(0)$ et $f'(2)$ (donner une valeur approchée à 10^{-2} près).

c. Dresser le tableau de variations de f' sur $[0\,;2]$ et en déduire que l'équation $f'(x) = 0$ admet une unique solution α sur cet intervalle.

3. On considère l'algorithme de dichotomie suivant :

```
a ← 0
b ← 2
Pour i allant de 1 à 8 :
    c ← (a+b)/2
    Si f′(a)×f′(c)<0 :
        Alors : b ← c
    Sinon :
        a ← c
Fin pour
```

a. Quelle est la précision de l'encadrement de α que l'on peut obtenir ainsi ?

b. Rédiger cet algorithme en python et l'adapter afin d'obtenir un encadrement de α d'amplitude maximale 10^{-3}.
Donner l'encadrement obtenu.

> Attention à donner les nombres de l'encadrement avec assez de précision pour répondre sans erreur à la question.

4. Déduire de ce qui précède l'étude des variations de f.

5. Montrer que $f(\alpha) = -\alpha\left(\frac{\alpha}{2}+1\right)$ et en déduire un encadrement au centième de $f(\alpha)$.

> Sachant que $f'(\alpha)=0$, exprimer e^{α} comme fonction affine de α.

6. Déterminer l'équation de la tangente T_2 à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2, puis celle de la tangente T_α à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse α.

7. Tracer $\mathscr{C}_f$, T_α et T_2.

9 ALCOOLÉMIE

★★ | 30 min | ▸ P. 191

Le taux d'alcoolémie d'une personne est la quantité d'alcool dans le sang en g/L. Après la consommation d'une certaine quantité d'alcool, le taux d'alcoolémie peut être modélisé par une fonction du type : $f(t) = kte^{-t}$ où le coefficient k dépend de la quantité d'alcool ingérée et où t est le temps exprimé en heures. Nous prendrons ici $k = 3$ et $t \in [0\,;12]$.

1. Quelle est le taux d'alcoolémie de la personne considérée au début de l'expérience, c'est-à-dire à $t = 0$?

2. Démontrer que : $f'(t) = k(1-t)e^{-t}$ pour $t \in [0\,;12]$.

3. a. Étudier les variations de la fonction f et en déduire à quel moment le taux d'alcoolémie atteint son maximum.

b. Donner une valeur approchée à 0,001 près de ce maximum et du taux d'alcoolémie à $t = 12\text{h}$.

4. En France en 2019, le Code de la route interdit toute conduite d'un véhicule lorsque le taux d'alcoolémie est supérieur ou égal à 0,5 g/L.
Rédiger un algorithme en python permettant de déterminer une valeur approchée à 5 minutes près du temps que cette personne doit attendre pour pouvoir prendre le volant et indiquer la réponse obtenue.

10 MÉTHODE D'EULER

★★★ | 40 min | ▸ P. 192

> On admet le résultat suivant, appelé approximation affine.
> Soit f une fonction dérivable en a. Si h est proche de zéro, alors :
> $$f(a+h) \approx f(a) + hf'(a).$$

Dans cet exercice, f est la fonction exponentielle.

1. Soit a un réel. Démontrer que, pour h proche de zéro :
$$\exp(a+h) \approx (1+h)\exp(a).$$

2. Nous allons approcher f par une fonction affine par morceaux (dont le pas est noté h) : c'est la méthode d'Euler.
Prenons par exemple $h = 0{,}2$.

- Le premier point M_0 a pour coordonnées $x_0 = 0$ et $y_0 = 1$ ($f(0) = 1$).
- Le point suivant M_1 a pour coordonnées $x_1 = x_0 + h = 0{,}2$ et y_1.

Nous ne calculons pas $f(x_1)$, mais l'approximation affine pour $a = x_0$ nous en donne une valeur approchée puisque :
$$f(x_1) = f(x_0 + h) \approx (1+h) \times f(x_0).$$
On pose donc $y_1 = (1+h) \times f(x_0) = (1+0{,}2) \times 1$, d'où $y_1 = 1{,}2$.

- Le point M_2 a pour coordonnées $x_2 = x_1 + h = 0{,}4$ et y_2.

L'approximation affine pour $a = x_1$ nous donne une valeur approchée de $f(x_2)$ puisque :
$$f(x_2) = f(x_1 + h) \approx (1+h) \times f(x_1) \approx (1+h) \times y_1.$$
On pose donc $y_2 = (1+h) \times y_1 = (1+0{,}2) \times 1{,}2$, d'où $y_2 = 1{,}44$.

a. Déterminer les coordonnées de M_3, puis de M_4.

b. Voici un algorithme permettant d'afficher les premiers points M_n : ceux dont l'abscisse est strictement inférieure à $3{,}2$.

```
x ← 0
y ← 1
Placer le point de coordonnées (x ; y)
Tant que x < 3
    x ← x + 0,2
    y ← y × (1 + 0,2)
    Placer le point de coordonnées (x ; y)
Fin Tant que
```

Recopier et lancer le script suivant :

```
import matplotlib.pyplot as plt
plt.axis([-0.5,5,-1,20])
plt.grid
x=0
y=1
h=0.2
x_M=[x]
y_M=[y]
while x < 3:
    x=x+h
    y=y*(1+h)
    x_M.append(x)
    y_M.append(y)
plt.grid()
plt.scatter(x_M,y_M)
plt.show()
```

x_M.append(x) ajoute x à la fin de la liste x_M, voir le chapitre 1.

c. Modifier ce script pour qu'il demande à l'utilisateur de saisir une valeur décimale du pas h de son choix.
Le tester pour $h = 0{,}1$ puis $h = 0{,}05$.

d. Compléter le script de la question précédente pour qu'il trace la courbe de la fonction exponentielle sur l'intervalle $[0 ; 3]$ et comparer avec les points obtenus par la méthode d'Euler pour $h = 0{,}05$.

Il faut utiliser l'instruction **import numpy as np** puis **np.exp** pour appliquer la fonction exp sur les listes.

PRÉPARER UN CONTRÔLE

11 QCM

★★ | 20 min | ▶ P. 193

Pour chacune des questions ci-dessous, une seule réponse est correcte.

1. Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction exponentielle et T la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse -1.

T a pour équation :

a. $y = \mathrm{e}^{-1}(-x-1)$ **b.** $y = -x-1$ **c.** $y = \dfrac{2+x}{\mathrm{e}}$ **d.** $y = \mathrm{e}^{-1}(-x+1)$

2. $\mathrm{e}^{x-1} + \mathrm{e}^{x+1}$ est égal à …

a. $\mathrm{e}^{x-1} \times (1+\mathrm{e}^{x+2})$ **b.** e^{x^2-1} **c.** $\mathrm{e}^{x} \times \left(\mathrm{e}+\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$ **d.** $(\mathrm{e}^{x-1})^{x+1}$

3. Une des fonctions ci-dessous vérifie sur $\mathbb{R}$ l'égalité $2f' = f+6$:

a. la fonction $f_1 : x \mapsto \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 6$ **b.** la fonction $f_2 : x \mapsto 6 \times \mathrm{e}^{2x}$

c. la fonction $f_3 : x \mapsto \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} + 6$ **d.** la fonction $f_4 : x \mapsto \mathrm{e}^{2x} - 6$

4. L'équation $\mathrm{e}^{2x} - 3\mathrm{e}^{x} - 4 = 0$ admet dans $\mathbb{R}$:

a. aucune solution **b.** une solution

c. deux solutions distinctes **d.** plus de deux solutions.

> Remarquer que $\mathrm{e}^{2x} = \mathrm{e}^{x+x} = \mathrm{e}^{x} \times \mathrm{e}^{x} = (\mathrm{e}^{x})^2$ pour se ramener à une équation du second degré.

5. L'expression $-\mathrm{e}^{-x}$ …

a. n'est jamais négative **b.** est toujours négative

c. n'est négative que si x est positif **d.** n'est négative que si x est négatif.

12 FONCTION INCONNUE

★★ | 40 min | ▶ P. 194

Partie A.

On donne ci-dessous la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-5 ; 5]$.

On note f' la fonction dérivée de la fonction f.

Le point A de coordonnées $(0 ; -3)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}_f$.

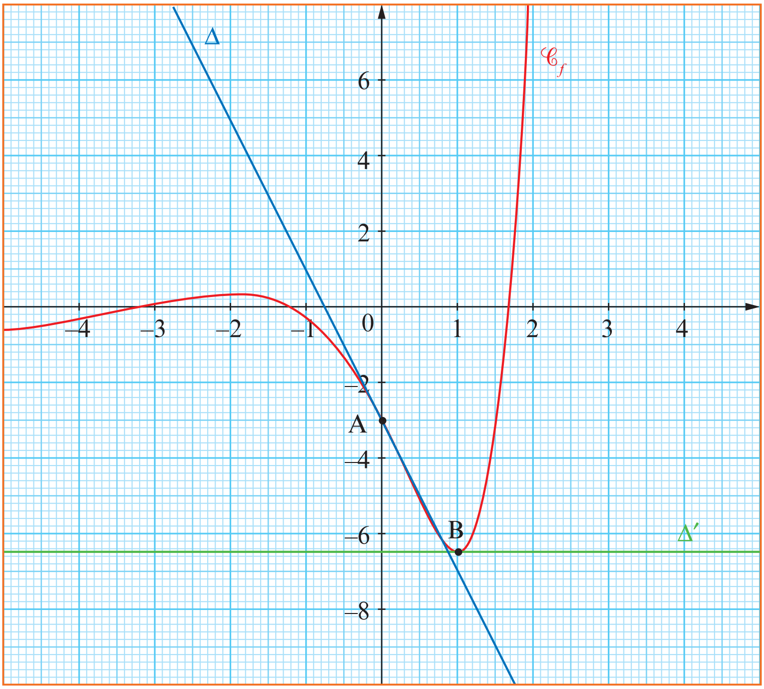
B est le point d'abscisse 1 appartenant à la courbe $\mathscr{C}_f$.

On sait que :

• la fonction f est strictement croissante sur les intervalles $[-5 ; -2]$ et $[1 ; 5]$; de plus elle est strictement décroissante sur $[-2 ; 1]$.

• la droite Δ d'équation $y = -4x-3$ est tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A.

• la tangente Δ' à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point B est parallèle à l'axe des abscisses.



Répondre à l'aide du graphique en justifiant les réponses :

a. Donner la valeur de $f'(1)$.

b. Quel est le signe de $f'(-4)$?

c. Donner la valeur de $f'(0)$.

Partie B.

La fonction f représentée à la **partie A** a une expression de la forme $f(x) = (ax^2 + bx + c)e^x - 1$ sur l'intervalle $[-5 ; 5]$.

a. En utilisant l'un des points du graphique, justifier que $c = -2$.

b. On admet que la fonction dérivée f' est donnée, pour tout x de $[-5 ; 5]$, par :

$$f'(x) = (ax^2 + (2a + b)x - 2 + b)e^x.$$

En utilisant les résultats de la **partie A**, justifier que $b = -2$, puis que $a = 2$.

Partie C.

La fonction f est donc définie pour tout réel x de $[-5 ; 5]$ par :

$$f(x) = (2x^2 - 2x - 2)e^x - 1.$$

a. Vérifier que pour tout réel x de l'intervalle $[-5 ; 5]$,

$$f'(x) = (2x^2 + 2x - 4)e^x.$$

b. Étudier le signe de f', puis dresser le tableau de variations de f sur $[-5 ; 5]$ (on pourra compléter le tableau avec des valeurs approchées des images $f(x)$ à 10^{-2} près).

ALLER PLUS LOIN

13 PLACEMENT FINANCIER ET RÈGLE DES 72 | ★★ | 45 min | ▸ P. 195

Préliminaires : les questions suivantes sont indépendantes.

1. Démontrer que la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = e^{nt}$ avec t un nombre réel, est une suite géométrique dont on précisera la raison.

Revoir si besoin le chapitre 2.

2. Soit t un nombre de l'intervalle [0 ; 0,1].
Par approximation affine de l'exponentielle, on a : $e^t \approx 1+t$ (voir l'exercice 10), et plus t est petit, plus cette approximation est précise.
Déterminer le pourcentage d'erreur que l'on commet si $t = 0{,}03$.

Placement financier

On considère un placement financier dont le rendement annuel est $t = 3\,\%$, soit $t = 0{,}03$.

3. a. Si on investit 10 000 € sur ce placement au 1er janvier 2020, quelle somme détiendra-t-on au bout d'un an ? au bout de 2 ans ? au bout de 5 ans ?

b. En déduire que le capital détenu au 1er janvier de l'année $2020+n$ forme une suite géométrique (v_n) de premier terme $v_0 = 10\,000$, et dont on précisera la raison.

c. En s'aidant des résultats établis dans les préliminaires, donner une expression d'une valeur approchée du capital détenu au 1er janvier $2020+n$ à l'aide de la fonction exponentielle.

4. La plupart du temps, un investisseur décide de récupérer son argent à une date qui n'est pas le 1er janvier. Grâce à la fonction exponentielle, on pourra définir la fonction $v(x) = 10000e^{0{,}03x}$ donnant une valeur approchée du capital détenu x années après le début du placement, où $x \in \mathbb{R}$.

a. Calculer une valeur approchée du capital détenu au bout de 6 mois.

b. Donner une valeur approchée du capital détenu le 1er février 2021.

c. Donner une valeur approchée du capital détenu au bout de 23 ans et 2 mois.

5. Luca Pacioli était un mathématicien italien et l'un des « inventeurs » de la comptabilité telle qu'on la connaît aujourd'hui. Il formula la « règle des 72 » dans son livre « Summa de arithmetica » publié en 1494 :

« *Si un capital est placé avec un taux d'intérêt de t % par an, il faut* $\dfrac{72}{t}$ *années pour le doubler.* »

a. Cette règle correspond-elle à la réponse établie au **4. c.** ?

b. D'après cette règle, en combien de temps double-t-on son capital s'il est placé à 10 % ? Faire le calcul avec l'exponentielle pour comparer.
Faire ensuite le calcul exact pour 7 et 8 ans de placement.

c. On admet que $2 = e^{\ln 2}$, où $\ln 2$, peut être obtenu avec la touche ln de la calculatrice.
Transformer l'égalité $e^{tx} = 2$ pour obtenir une expression de x en fonction de t.
d. Faire le lien entre la règle de Luca Pacioli et la réponse obtenue au **5. c.**

Infos
• La valeur 70 donne de meilleurs résultats pour de petits taux d'intérêts, entre 0,5 % et 5 %, car l'erreur commise avec l'approximation affine est faible.
• La valeur 72 est plus proche de la valeur exacte pour des taux d'intérêts entre 5 % et 10 % et 72 a de nombreux diviseurs, ce qui était avantageux à l'époque de Pacioli, où la calculatrice n'existait pas ...
• En terminale, nous verrons que, sans faire d'approximation, le capital obtenu au bout de x années, x étant un réel, est : $10\,000 \times e^{x\ln(1+t)}$ où ln est la fonction logarithme népérien.

14 FONCTIONS COSINUS HYPERBOLIQUE ET SINUS HYPERBOLIQUE

★★★ | 45 min | ▸ P. 197

On définit sur $\mathbb{R}$ les fonctions ch et sh (appelées cosinus et sinus hyperboliques) par :

$$\mathrm{ch}(x) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} \text{ et } \mathrm{sh}(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}.$$

1. a. Étudier les variations de ch et sh sur $\mathbb{R}$.
b. Tracer les courbes représentatives de ch et sh dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.
2. Quelques propriétés
a. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1.$$

b. Démontrer que, pour tout $(x ; y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\mathrm{sh}(x)\mathrm{ch}(y) + \mathrm{ch}(x)\mathrm{sh}(y) = \mathrm{sh}(x + y).$$

En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{sh}(2x) = 2\mathrm{sh}(x)\mathrm{ch}(x).$$

c. Démontrer que, pour tout $(x ; y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\mathrm{ch}(x)\mathrm{ch}(y) + \mathrm{sh}(x)\mathrm{sh}(y) = \mathrm{ch}(x + y).$$

En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{ch}(2x) = \mathrm{ch}^2(x) + \mathrm{sh}^2(x) = 2\mathrm{ch}^2(x) - 1 = 1 + 2\mathrm{sh}^2(x).$$

CORRIGÉS

1 RELATION FONCTIONNELLE

1. a. $1-\left(\left(e^{\frac{3}{2}}\right)\times e^{-3}\right)^2\times e^3 = 1-\left(e^{-\frac{3}{2}}\right)^2\times e^3$

$$= 1-e^{-\frac{3}{2}\times 2}\times e^3$$
$$= 1-e^{-3+3} = 1-e^0 = \mathbf{0}.$$

b. $\left(e^x\right)^3\left(e^{2x}-e^{-3x}\right) = e^{3x}\times\left(e^{2x}-e^{-3x}\right)$

$$= e^{3x}\times e^{2x}-e^{3x}\times e^{-3x}$$
$$= e^{5x}-e^0 = \mathbf{e^{5x}-1}.$$

c. $\dfrac{e^5+e^2}{e^2}-\dfrac{e}{\left(e^{-1}\right)^2} = \dfrac{e^2\times e^3+e^2}{e^2}-\dfrac{e^1}{e^{-2}}$

$$= \frac{e^2\left(e^3+1\right)}{e^2}-e^1\times e^{-(-2)} = (e^3+1)-e^3 = \mathbf{1}.$$

d. $e^{(3x+1)^2}\times e^{-6x}-e = e^{(9x^2+6x+1)-6x}-e$

$$= e^{9x^2+1}-e = \mathbf{e\times\left(e^{9x^2}-1\right)}.$$

2. $\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}} = \dfrac{\left(e^x+e^{-x}\right)\times e^x}{\left(e^x-e^{-x}\right)\times e^x}$

$$= \frac{e^{x+x}+e^{-x+x}}{e^{x+x}-e^{-x+x}} = \mathbf{\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}}.$$

2 (IN) ÉQUATIONS

a. Quel que soit le réel x, $e^x>0$ donc $e^{-2x}=0$ est impossible : $\mathcal{S}=\varnothing$.

b. $e^{2x-3}<1 \Leftrightarrow e^{2x-3}<e^0 \Leftrightarrow 2x-3<0$ car exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$e^{2x-3}<1 \Leftrightarrow x<\dfrac{3}{2}$, donc $\mathcal{S} = \left]-\infty\,;\dfrac{3}{2}\right[$.

c. $e^{x(x-1)}>e^{3x+1} \Leftrightarrow x(x-1)>3x+1$ car la fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$$e^{x(x-1)}>e^{3x+1} \Leftrightarrow x^2-4x-1>0.$$

$\Delta = 20 = (2\sqrt{5})^2$. Les racines du trinôme x^2-4x-1 sont :

$$x_1 = \frac{4+2\sqrt{5}}{2} = 2+\sqrt{5} \text{ et } x_2 = \frac{4-2\sqrt{5}}{2} = 2-\sqrt{5}.$$

Donc $e^{x(x-1)}>e^{3x+1} \Leftrightarrow \left(x<2-\sqrt{5} \text{ ou } x>2+\sqrt{5}\right)$

$$\mathcal{S} = \mathbf{]-\infty\,;2-\sqrt{5}[\cup]2+\sqrt{5}\,;+\infty[}.$$

x^2-4x-1 est du signe de $a=1$ à l'extérieur des racines.

d. Posons $X=e^x$.

Alors $X^2=(e^x)^2=e^{2x}$ et $e^{x+1}=e^x\times e^1=X\times e$

$4e^{2x}-3e^{x+1}-e^2=0 \Leftrightarrow 4X^2-3eX-e^2=0$.

$\Delta = (-3e)^2-4\times4\times\left(-e^2\right) = 9e^2+16e^2 = 25e^2 = (5e)^2>0$.

Les racines du trinôme $4X^2 - 3eX - e^2$ sont :

$$X_1 = \frac{3e - 5e}{2 \times 4} = \frac{-2e}{8} = -\frac{e}{4} \text{ et } X_2 = \frac{3e + 5e}{2 \times 4} = \frac{8e}{8} = e.$$

D'où :

$$4e^{2x} - 3e^{x+1} - e^2 = 0 \Leftrightarrow \left(X = -\frac{e}{4} \text{ ou } X = e\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(e^x = -\frac{e}{4} \text{ ou } e^x = e\right)$$

$$\Leftrightarrow e^x = e^1$$

car une exponentielle ne peut pas être négative, la solution est $\boldsymbol{x = 1}$.

3 ÉTUDES DE VARIATIONS

a. f est de la forme e^{ax+b} avec : $a = -1$ et $b = 0$.
Pour tout x réel, $f'(x) = (-1) \times e^{-x} = -e^{-x}$.
Une exponentielle est toujours strictement positive, donc quel que soit le réel x, $f'(x) < 0$. Par conséquent, **f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.**

b. g est le produit de la fonction $u : x \mapsto 2 - x$ par la fonction $v : x \mapsto e^{2x+1}$.
De plus $u'(x) = -1$ et $v'(x) = 2 \times e^{2x+1}$. Alors :

$$g'(x) = (-1) \times e^{2x+1} + (2 - x) \times 2e^{2x+1} = (-1 + 4 - 2x)e^{2x+1}.$$

Donc $\boldsymbol{g'(x) = (3 - 2x)e^{2x+1}}$.
Une exponentielle est strictement positive, donc le signe de $g'(x)$ est celui de $3 - 2x$, qui s'annule en $\frac{3}{2}$, d'où le tableau suivant :

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	–	
$g(x)$		↗	$\frac{e^4}{2}$	↘	

Le maximum vaut $g\left(\frac{3}{2}\right) = \left(2 - \frac{3}{2}\right) \times e^{2 \times \frac{3}{2} + 1} = \frac{1}{2} \times e^4 = \frac{e^4}{2}$.

c. h est de la forme $(-3) \times \frac{1}{v}$ avec $v : x \mapsto e^x + 2$.

> On peut aussi voir h comme un quotient $\frac{u}{v}$ avec $u : x \mapsto -3$.
> Le dénominateur $e^x + 2$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, donc h est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout x réel, $v'(x) = e^x$ et donc :

$$h'(x) = (-3) \times \frac{-v'(x)}{[v(x)]^2} = (-3) \times \frac{-e^x}{(e^x + 2)^2} = \boldsymbol{\frac{3e^x}{(e^x + 2)^2} > 0}.$$

Donc h est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

d. k est de la forme $u \times u$, avec $u : x \mapsto -5 - 2e^{\frac{x}{2}}$.

Pour tout x réel, $u'(x) = -2 \times \frac{1}{2} \times e^{\frac{x}{2}} = -e^{\frac{x}{2}}$.

Donc $k'(x) = -e^{\frac{x}{2}} \times \left(-5 - 2e^{\frac{x}{2}}\right) + \left(-5 - 2e^{\frac{x}{2}}\right) \times \left(-e^{\frac{x}{2}}\right)$.

$\boldsymbol{k'(x) = -2\left(-5 - 2e^{\frac{x}{2}}\right) \times e^{\frac{x}{2}}}$.

Or : $-2 < 0$ et $e^{\frac{x}{2}} > 0$ pour tout x, donc $k'(x)$ est de signe opposé à $-5 - 2e^{\frac{x}{2}}$.

Or, $-5 - 2e^{\frac{x}{2}} > 0 \Leftrightarrow -5 > 2e^{\frac{x}{2}} \Leftrightarrow -\frac{5}{2} > e^{\frac{x}{2}}$. Une exponentielle n'étant jamais négative, c'est impossible donc $-5 - 2e^{\frac{x}{2}}$ n'est jamais positif, mais toujours négatif.

Donc k est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

4 TANGENTE À $\mathscr{C}$ AU POINT D'ABSCISSE 0

a. T a pour équation $y = \exp(0) + \exp'(0)(x - 0)$, soit

$$y = e^0 + e^0 x = 1 + 1 \times x \text{ c'est-à-dire } \mathbf{T : y = x + 1}.$$

b. • f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout x réel, $f'(x) = e^x - 1$.

La fonction exponentielle étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$,

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow e^x > e^0 \Leftrightarrow x > 0$ et :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0.$$

Donc f est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0]$ et strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

• $f(0) = e^0 - 0 - 1 = 0$. Le tableau de variations de f est donc :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Variations de f	$\searrow$	0	$\nearrow$

Il en résulte que **f est positive sur $\mathbb{R}$ et s'annule en 0.**

c. La position relative de $\mathscr{C}$ et de T est donnée par le signe de la différence $e^x - (x + 1) = f(x)$. Or, $f(x) \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$ et $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Donc la courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de la droite T. Elles ont un unique point commun, pour $x = 0$, et $f(0) = e^0 = 1$, donc le point $J(0\,;1)$.

5 ÉTUDE DE FONCTION

1. $f(0) = \frac{1}{2} \times 1 - e^1 + c = \frac{1}{2} - e + c$.

$f(0) = \frac{1}{2}$, donc $\frac{1}{2} - e + c = \frac{1}{2}$, soit $\boldsymbol{c = e}$.

2. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$f'(x) = \frac{1}{2} \times 2e^{2x} - 1 \times e^{x+1} + 0 = e^{2x} - e^{x+1}$.

• $f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{2x} = e^{x+1} \Leftrightarrow 2x = x + 1 \Leftrightarrow x = 1$

• $f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^{2x} > e^{x+1} \Leftrightarrow 2x > x + 1 \Leftrightarrow x > 1$

• $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 1$.

$f(1) = \frac{1}{2} \times e^2 - e^2 + e = -\frac{1}{2} \times e^2 + e$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$\dfrac{-e^2}{2}+e$	$\nearrow$	

3. a. f admet un minimum en 1, qui vaut $f(1)=-\dfrac{e^2}{2}+e\approx -0{,}98$, **donc le minimum de f sur $\mathbb{R}$ est strictement supérieur à –1.**

b. Par conséquent, **–1 n'admet pas d'antécédent par f.**

4. a. $\dfrac{1}{2}X^2-eX=0 \Leftrightarrow X\left(\dfrac{1}{2}X-e\right)=0$

$\Leftrightarrow$ **$X=0$ ou $X=2e$**.

b. $f(x)=e \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}e^{2x}-e^{x+1}+e=e \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}e^{2x}-e^{x+1}=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\times\left(e^x\right)^2-e^x\times e^1=0.$

Posons $X=e^x$.

Alors $f(x)=e \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}X^2-eX=0$

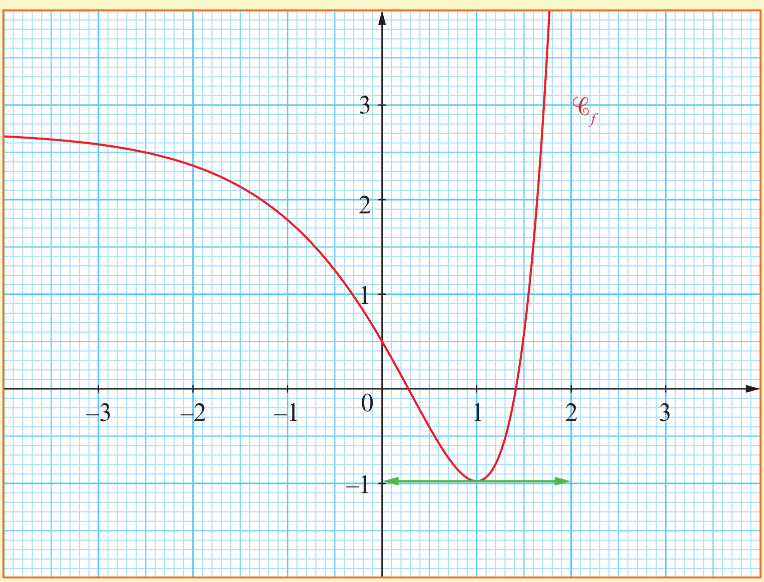
$\Leftrightarrow X=0$ ou $X=2e$

$\Leftrightarrow e^x=0$ ou $e^x=2e$.

Or, l'équation $e^x=0$ n'admet aucune solution puisque, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $e^x>0$.
De plus, l'équation $e^x=2e$ admet une unique solution puisque $2e>0$ et que la fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Donc e admet un unique antécédent par f.

5.



6 ANTÉCÉDENTS PAR LA FONCTION EXP

1. a. $g(x)=e^x\times e^{-x}$: la fonction g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et c'est un produit de deux fonctions, $\left(e^x\right)'=e^x$ et $\left(e^{-x}\right)'=-e^{-x}$ donc :

$$\boldsymbol{g'(x)=e^x\times e^{-x}+e^x\times\left(-e^{-x}\right)=0}.$$

b. Les seules fonctions dont la dérivée vaut 0 sont les fonctions constantes, donc $\boldsymbol{g(x)=g(0)}$ quel que soit x, c'est-à-dire :

$$e^x\times e^{-x}=e^0\times e^{-0}=1\Leftrightarrow \boldsymbol{g(x)=1}\ \ \textbf{pour tout } \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}.$$

c. $e^x\times e^{-x}=1$, donc pour tout réel x : $e^x\neq 0$.

2. Quel que soit le réel x, on a $e^x=e^{\frac{x}{2}+\frac{x}{2}}=e^{\frac{x}{2}}\times e^{\frac{x}{2}}=\left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2$, or le carré d'un nombre non nul est strictement positif, donc $e^x>0$ quel que soit x.
La fonction exponentielle est strictement positive et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3. Soit y tel qu'il existe un réel x tel que $e^x=y$.
Supposons qu'il existe un autre réel x' tel que $e^{x'}=y$.
x et x' étant différents, l'un est forcément strictement plus grand que l'autre, par exemple $x<x'$.
Alors, l'exponentielle étant strictement croissante, elle conserve l'ordre, donc :

$$e^x<e^{x'}\ \Leftrightarrow\ y<y.$$

C'est impossible, donc **l'équation admet alors une unique solution, si elle existe**.

> Cette démonstration est une démonstration par l'absurde : on émet une hypothèse qui mène à une contradiction, donc l'hypothèse est fausse.

4. • L'équation $e^x=e$ a une solution qui est $x=1$ et est unique, et $\boldsymbol{\ln(e)=1}$.
• L'équation $e^x=1\Leftrightarrow e^x=e^0$ a une solution qui est $x=0$ et qui est donc unique, et $\boldsymbol{\ln(1)=0}$.
• L'équation $e^x=e^3$ a une solution qui est $x=3$ et est unique, et $\ln\left(e^3\right)=3$.

5. a. On obtient $\boldsymbol{\ln(5)\approx 1.6093999999999995}$.

> À la calculatrice, on obtient $\ln(5)\approx 1{,}60943791$

b. Les listes calculées successivement contiennent 10 valeurs de $\exp\left(x+\dfrac{i}{10^n}\right)$ avec i qui va de 0 à 9. Le programme balaie ces tables de valeurs avec un pas qui diminue lorsque n augmente ; n va de 0 à 4, donc le pas est 1, puis $\dfrac{1}{10}$, puis $\dfrac{1}{10^2}=10^{-2}$, puis $\dfrac{1}{10^3}=10^{-3}$, et enfin $\dfrac{1}{10^4}=10^{-4}$.
La valeur approchée obtenue est donc à $\boldsymbol{10^{-4}}$ près.

> En effet, on peut vérifier que la différence entre cette valeur et la valeur obtenue à la calculatrice est inférieure à 10^{-4}. Le balayage s'arrête grâce à la boucle « if » dès qu'un nombre dans la liste dépasse 5. La liste suivante repart de la dernière valeur de x dont l'image est inférieure à 5.

7 RADIOACTIVITÉ

1. Pour tout $t \in]0\,;+\infty[$, $N'(t) = \mathrm{N}_0 \times (-\lambda)\mathrm{e}^{-\lambda t} = -\lambda N(t)$.
$\boldsymbol{N'(t)}$ **est donc proportionnel au nombre de noyaux radioactifs** $\boldsymbol{N(t)}$**,**
et le coefficient de proportionnalité vaut $(-\boldsymbol{\lambda})$.

2. $N(t) = \dfrac{1}{2}N(0) \Leftrightarrow \mathrm{N}_0\mathrm{e}^{-\lambda t} = \dfrac{1}{2}N_0$

$$\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-\lambda t} = \frac{1}{2} \text{ (car } N_0 > 0) \Leftrightarrow \frac{1}{\mathrm{e}^{\lambda t}} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{e}^{\lambda t} = 2 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{\lambda t} = \mathrm{e}^{\ln 2} \Leftrightarrow \lambda t = \ln 2 \Leftrightarrow t = \frac{\ln 2}{\lambda}.$$

Donc $\boldsymbol{T = \dfrac{\ln 2}{\lambda}}$.

3. a. $\boldsymbol{\lambda = \dfrac{\ln 2}{5\,730} \approx 1{,}21 \times 10^{-4}}$.

b. Soit t le nombre d'années écoulées depuis la mort de cet humain, alors
$N(t) = \dfrac{35}{100} \times \mathrm{N}_0$, c'est-à-dire $\exp\left(-1{,}21 \times 10^{-4} \times t\right) = 0{,}35$, soit
$t = \dfrac{\ln 0{,}35}{-1{,}21 \times 10^{-4}} \approx 8\,676$ années.

Cet humain est mort 8 676 ans avant la découverte, soit en 6 670 avant J.-C.

c. On a : $5\,690 < T < 5\,770$. On en déduit un encadrement de λ entre :
$\dfrac{\ln 2}{5\,690} \approx 0{,}0\,001\,218$ et $\dfrac{\ln 2}{5\,770} \approx 0{,}0\,001\,201$.

D'où un encadrement de t entre :

$$\frac{\ln 0{,}35}{-1{,}218 \times 10^{-4}} \approx 8\,619 \text{ ans} \quad \text{et} \quad \frac{\ln 0{,}35}{-1{,}201 \times 10^{-4}} \approx 8\,741 \text{ ans.}$$

Cet humain serait donc mort entre 6 613 et 6 735 avant J.-C.

8 ÉTUDE DE FONCTION ET DICHOTOMIE

1. f est la somme de plusieurs fonctions dérivables sur $[0\,;+\infty[$, donc elle est dérivable sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.
Pour tout $x \in [0\,;+\infty[$,

$$f'(x) = \mathrm{e}^x - \frac{2x}{2} - 2 = \boldsymbol{\mathrm{e}^x - x - 2}.$$

2. a. f' est encore dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et, pour tout $x \in [0\,;+\infty[$:

$$f''(x) = \mathrm{e}^x - 1.$$

$f''(x) > 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$ et $f''(0) = 0$.
Donc $\boldsymbol{f'}$ **est strictement croissante sur** $\boldsymbol{[0\,;+\infty[}$.

b. $f'(0) = \mathrm{e}^0 - 2 = 1 - 2 = \boldsymbol{-1}$ et $f'(2) = \mathrm{e}^2 - 2 - 2 \approx \boldsymbol{3{,}39}$.

c.

x	0	2
$f''(x)$	$+$	
$f'(x)$	-1 $\nearrow$	$\mathrm{e}^2 - 4$

f' est strictement croissante sur [0 ; 2] et passe d'une valeur strictement négative à une valeur strictement positive. D'après le tableau de variations, elle passe donc une unique fois par la valeur 0. On appelle α la solution de $f'(x) = 0$.

3. a. i va de 1 à 8, donc on répète 8 fois l'opération qui consiste à donner à c la valeur du centre de l'intervalle $[\,a\,;b\,]$ puis à remplacer a ou b par c.
Autrement dit, on divise 8 fois par 2 l'amplitude de l'intervalle $[0\,;2]$, donc on la divise par $2^8 = 256$:
$\frac{2}{256} = \frac{1}{128} = 0{,}0\,078\,125$ donc **on obtient un encadrement d'amplitude légèrement inférieure à 0,008**.

b. Si on veut une amplitude maximale de 10^{-3}, il faut diviser l'intervalle par 2^{11} car $\frac{2}{2^{11}} = \frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{1024} \approx 0{,}000\,977 < 0{,}001$.
L'opération doit être répétée 11 fois. D'où l'algorithme en python :

```
from math import*
def f(x):
    return (exp(x)-x-2)
a=0
b=2
for i in range(11):
    c=(a+b)/2
    if f(a)*f(c)<0:
        b=c
    else:
        a=c
print ("La valeur de alpha est encadrée par les nombres", a, b)
```

On obtient : $\mathbf{1{,}1455} < \alpha < \mathbf{1{,}1465}$.

La différence entre ces 2 nombres est bien de 0,001 soit 10^{-3} : il faut arrondir le premier nombre obtenu par défaut et le second par excès pour ne pas exclure par erreur la valeur réelle de α de notre réponse.
On ne peut pas donner les bornes de l'encadrement avec 3 chiffres après la virgule, sinon on donnerait 1,145 et 1,147 mais l'amplitude serait alors 0,002.

4. Tableau de variations de f :
f' est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$, donc elle reste positive sur $[\alpha\,;+\infty[$.

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	-1	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	

$f(0) = e^0 - \frac{0^2}{2} - 2\times 0 - 2 = -1$.

5. $f(\alpha) = e^{\alpha} - \dfrac{\alpha^2}{2} - 2\alpha - 2$.

Or $f'(\alpha) = 0$, d'où $e^{\alpha} - \alpha - 2 = 0 \Leftrightarrow e^{\alpha} = \alpha + 2$.

Donc $f(\alpha) = \alpha + 2 - \dfrac{\alpha^2}{2} - 2\alpha - 2 = -\alpha - \dfrac{\alpha^2}{2} = -\alpha\left(\dfrac{\alpha}{2} + 1\right)$.

$1{,}1455 < \alpha < 1{,}1\,465$, donc $1{,}57\,275 < \dfrac{\alpha}{2} + 1 < 1{,}57\,325$.

Conserver toutes les décimales lors des calculs.

Les termes étant tous positifs, on peut multiplier membre à membre les deux inégalités et on obtient :

$$1{,}801\,585 < \alpha \times \left(\frac{\alpha}{2} + 1\right) < 1{,}\,803\,731$$

$$-1{,}803\,731 < -\,\alpha \times \left(\frac{\alpha}{2} + 1\right) < -\,1{,}\,801\,585.$$

Donc, un encadrement au centième de $f(\alpha)$ est :

$$\boldsymbol{-1{,}81 < f(\alpha) < -\,1{,}80.}$$

6. T_2 a pour équation $y = f(2) + f'(2)(x - 2)$. Or,

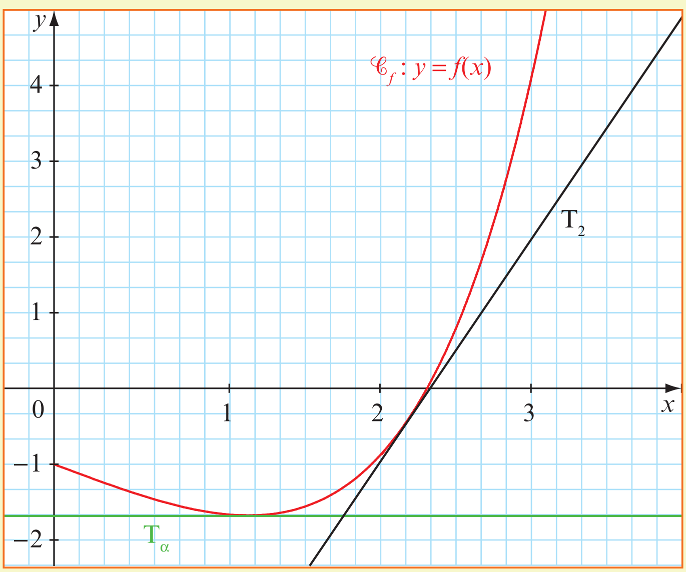
$$f(2) + f'(2)(x - 2) = e^2 - 8 + (e^2 - 4)(x - 2) = (e^2 - 4)x - e^2.$$

Donc $T_2 : y = (e^2 - 4)x - e^2$.

T_α a pour équation $y = f(\alpha) + f'(\alpha)(x - \alpha)$ avec $f'(\alpha) = 0$ et $f(\alpha) = -\alpha\left(\dfrac{\alpha}{2} + 1\right)$.

Donc $\boldsymbol{T_2 : y = -\alpha\left(\dfrac{\alpha}{2} + 1\right)}$ (tangente horizontale).

7.



9 ALCOOLÉMIE

1. $f(0)=3\times 0\times \mathrm{e}^{-0}=0$: **la personne a un taux d'alcoolémie de 0 au début de l'expérience.**

2. f est dérivable comme produit de deux fonctions dérivables sur [0 ; 12] :
$u(t)=kt$, donc $u'(t)=k$, et $v(t)=\mathrm{e}^{-t}$, donc $v'(t)=-\mathrm{e}^{-t}$.
Alors : $f'(t)=k\times \mathrm{e}^{-t}+kt\times(-\mathrm{e}^{-t})=(k-kt)\mathrm{e}^{-t}=k(1-t)\mathrm{e}^{-t}$.

3. a. Une exponentielle est toujours strictement positive et $k>0$, donc f' a le même signe que $1-t$. D'où le tableau suivant :

x	0		1		12
Signe de $1-t$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	$3\mathrm{e}^{-1}$	$\searrow$	$36\mathrm{e}^{-12}$

Le maximum est atteint pour $t=1$ et ce maximum vaut :

$$f(1)=3\times 1\times \mathrm{e}^{-1}\approx \mathbf{1{,}103\ g/L}.$$

b. $f(12)=3\times 12\times \mathrm{e}^{-12}\approx 0{,}0002$, soit **0 g/L** à 0,001 près : l'alcoolémie est nulle après 12 h.

4. Il n'est pas prudent de prendre la route avant que le maximum ne soit atteint car le taux maximal autorisé risque d'être atteint avant l'arrivée.
Un conducteur ne devrait donc prendre la route qu'après que son taux d'alcoolémie ne soit redescendu en-dessous de 0,5 g/L, donc on fait démarrer la recherche après 1 h.

On veut une valeur approchée à 5 minutes près, ce qui représente $\frac{1}{12}$ d'une heure.

On peut parcourir le tableau de valeurs de la fonction jusqu'à $t=12$ et arrêter la recherche quand on trouve une valeur inférieure à 0,5.
On est sûr de trouver une réponse car la fonction diminue jusqu'à 0 (à 0,001 près).
La seule difficulté de l'algorithme va être de donner la réponse en heure, minutes.

int(t) permet de calculer la partie entière de *t*, donc le nombre d'heures écoulées ; pour calculer le nombre de minutes, on multiplie la partie décimale de *t* par 60.

```
from math import*
def f(t):
    return (3*t*exp(-t))
t=1
while f(t)>0.5:
    t=t+1/12
min=(t-int(t))*60
print ("Le conducteur peut prendre la route après", int(t), "h", min, "min")
```

L'algorithme nous permet de dire que le conducteur peut prendre la route 2 h 50 min après le début de l'expérience.

Prolongement

Cependant le logiciel arrondit les valeurs de $\frac{1}{12}$ à chaque étape, ce qui explique que l'affichage final est 2h50.0000000036 min.
On peut améliorer ce résultat en demandant d'arrondir les minutes : round(min).
Une difficulté supplémentaire qui ne se pose pas ici : si la valeur exacte de *t* était 3h par exemple, et si par le jeu des arrondis le résultat de *t* était très légèrement inférieur à 3, alors quand on prend la partie entière de *t* on obtiendrait 2. Heureusement ensuite le calcul des minutes nous donnerait environ 60 min, donc on retrouverait 3 h.

10 MÉTHODE D'EULER

1. Soit a un réel. Pour h proche de zéro, $f(a+h) \approx f(a) + h \cdot f'(a)$.
Mais puisque $f = f'$, $f'(a) = f(a)$, d'où :

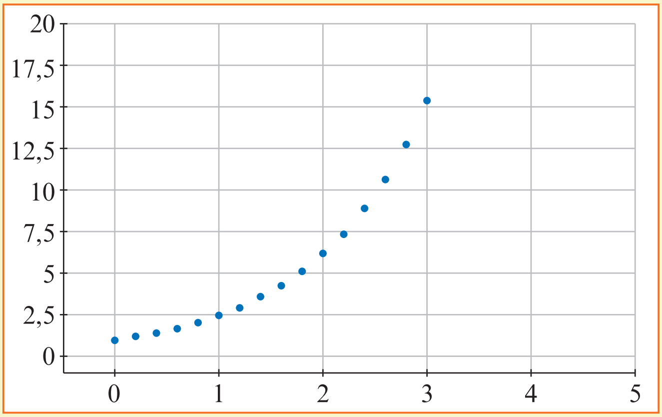
$$f(a) + hf'(a) = f(a) + hf(a) = f(a) \times (1+h).$$

On a donc bien, pour h proche de zéro :

$$\exp(a+h) \approx (1+h)\exp(a).$$

2. a. • Le point M_3 a pour coordonnées $x_3 = x_2 + h = 0{,}6$ et y_3.
L'approximation affine pour $a = x_2$ nous donne une valeur approchée de $f(x_3)$ puisque $f(x_3) = f(x_2 + h) \approx (1+h) \times f(x_2) \approx (1+h) \times y_2$.
On pose donc $y_3 = (1+h) \times y_2 = (1+0{,}2) \times 1{,}44$ d'où : $y_3 = 1{,}728$.
Finalement $\mathbf{M_3(0{,}6\ ;\ 1{,}728)}$.
• Le point M_4 a pour coordonnées $x_4 = x_3 + h = 0{,}8$ et y_4.
L'approximation affine pour $a = x_3$ nous donne une valeur approchée de $f(x_4)$ puisque $f(x_4) = f(x_3 + h) \approx (1+h) \times f(x_3) \approx (1+h) \times y_3$.
On pose donc $y_4 = (1+h)y_3 = (1+0{,}2) \times 1{,}728$, d'où : $y_4 = 2{,}073\ 6$.
Finalement $\mathbf{M_4(0{,}8\ ;\ 2{,}073\ 6)}$.

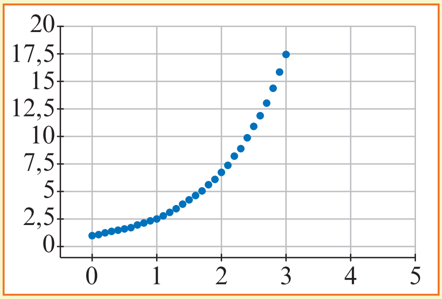
b. La console affiche :



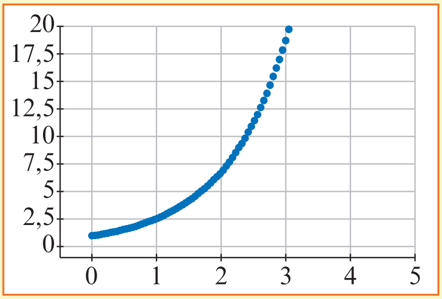
c. Il suffit de remplacer la ligne 6 du script par :

```
h=float(input("Entrer la valeur du pas h:"))
```

• Pour $h = 0{,}1$ on obtient :



• Pour $h = 0{,}05$ on obtient :



d. On ajoute en ligne 2 :

```
import numpy as np
```

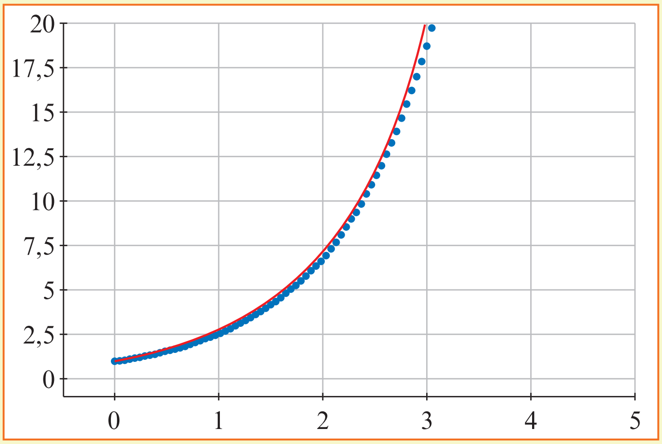
Après la boucle while on ajoute :

```
x1=np.linspace(0,3,100)
y1=np.exp(x1)
```

Après la ligne `plt.scatter(x_M,y_M)` on ajoute :

```
plt.plot(x1,y1)
```

On obtient :



On voit que l'approximation est de bonne qualité, bien que les points de l'approximation s'éloignent de la courbe lorsque x augmente.

11 QCM

1. Réponse c.

T : $y = \exp(-1) + \exp'(-1) \times (x - (-1))$ ou encore :

$$y = e^{-1} + e^{-1}(x+1) = e^{-1}(x+2).$$

Or, $e^{-1} = \dfrac{1}{e^1} = \dfrac{1}{e}$, d'où $y = \dfrac{x+2}{e}$.

2. Réponse c.

$e^{x-1} + e^{x+1} = e^x(e^{-1} + e^1) = e^x\left(\dfrac{1}{e} + e\right)$.

3. Réponse a.

Pour tout réel x, $f_1'(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$, donc $2 \times f_1'(x) = e^{\frac{x}{2}} = e^{\frac{x}{2}} - 6 + 6 = f_1(x) + 6$.

4. Réponse b.

Posons $X = e^x$.

Alors $e^{2x} - 3e^x - 4 = 0 \Leftrightarrow X^2 - 3X - 4 = 0$

> Cette équation du second degré a 2 racines que l'on peut trouver en remarquant que $x_1 = -1$ est une solution évidente et on trouve x_2 à l'aide du produit des racines : $x_1 \times x_2 = -4$. Sinon, on calcule le discriminant puis les racines à l'aide des formules habituelles (voir le chapitre 3).

$$\begin{aligned} e^{2x} - 3e^x - 4 = 0 &\Leftrightarrow X = -1 \text{ ou } X = 4 \\ &\Leftrightarrow e^x = -1 \text{ ou } e^x = 4 \\ &\Leftrightarrow e^x = 4 \quad (\text{car } e^x > 0). \end{aligned}$$

L'équation $e^x = 4$ admet une unique solution puisque la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

5. Réponse b.

La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$, donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} > 0$. Donc $-e^{-x}$ est strictement négatif sur $\mathbb{R}$.

12 FONCTION INCONNUE

Partie A.

a. $f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente au point de la courbe d'abscisse 1 : il s'agit de la tangente au point B qui est horizontale, son coefficient directeur vaut 0, donc : $\boldsymbol{f'(1) = 0}$.

b. Le signe de $f'(-4)$ correspond au sens de variation de la courbe $\mathscr{C}_f$ en $x = -4$. D'après l'énoncé, f est strictement croissante sur $[-5\,;2]$, donc $\boldsymbol{f'(-4) > 0}$.

c. $f'(0)$ est le coefficient directeur de la tangente au point de la courbe d'abscisse 0 : il s'agit de la tangente au point A, dont l'équation est donnée dans l'énoncé. Δ a pour coefficient directeur -4, donc $\boldsymbol{f'(0) = -4}$.

Partie B.

a. Les coordonnées du point A sont $(0\ ;-3)$, donc $f(0) = -3$.

Or, $f(0) = (a \times 0^2 + b \times 0 + c)e^0 - 1 = c \times 1 - 1 = c - 1$.

Donc $c - 1 = -3 \Leftrightarrow \boldsymbol{c = -2}$.

b. D'après la question **A. c.** :

$$\begin{aligned} f'(0) = -4 &\Leftrightarrow (a \times 0^2 + (2a + b) \times 0 - 2 + b)e^0 = -4 \\ &\Leftrightarrow (-2 + b) \times 1 = -4 \\ &\Leftrightarrow \boldsymbol{b = -2}. \end{aligned}$$

D'après la question **A. a.**,

$$\begin{aligned} f'(1) = 0 &\Leftrightarrow (a \times 1^2 + (2a + (-2)) - 2 - 2)e^1 = 0 \\ &\Leftrightarrow (a + 2a - 2 - 4)e^1 = 0 \end{aligned}$$

Or, $e^1 > 0$ donc $3a - 6 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{6}{3}$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{a = 2}.$$

Partie C.

a. La fonction f est dérivable sur $[-5\,;5]$ comme produit de 2 fonctions dérivables $u(x)=2x^2-2x-2$, donc $u'(x)=4x-2$ et $v(x)=\mathrm{e}^x$, donc $v'(x)=\mathrm{e}^x$.

Alors : $f'(x)=(4x-2)\mathrm{e}^x+(2x^2-2x-2)\mathrm{e}^x$

$=(4x-2+2x^2-2x-2)\mathrm{e}^x$

$=(2x^2+2x-4)\mathrm{e}^x$

b. Une exponentielle est strictement positive, donc f' a le même signe que $2x^2+2x-4$, qui est une expression du second degré.

On peut calculer Δ et les racines, mais on gagne du temps à remarquer que, puisqu'on connaît les variations de f dans la **partie A**, on sait pour quelles valeurs de x, $f'(x)$ s'annule donc on obtient les deux racines « évidentes ».

$2x^2+2x-4$ a deux racines évidentes, -2 et 1, et ce trinôme du second degré est du signe de 2, donc positif, à l'extérieur des racines.

D'où le tableau de variations :

x	-5		-2		1		5
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-0{,}61$	↗	$0{,}35$	↘	$-6{,}44$	↗	$5\,638{,}7$

13 PLACEMENT FINANCIER ET REGLE DES 72

Préliminaires

1. $u_n=\mathrm{e}^{nt}$, donc $u_{n+1}=\mathrm{e}^{(n+1)t}=\mathrm{e}^{nt+t}=\mathrm{e}^{nt}\times\mathrm{e}^t=u_n\times\mathrm{e}^t$.

Cette expression est de la forme $u_{n+1}=u_n\times q$, donc (u_n) **est bien une suite géométrique et sa raison est $q=\mathrm{e}^t$.**

2. $\mathrm{e}^{0,03}\approx 1{,}030455$, donc l'erreur commise en prenant $1+t=1{,}03$ est de $4{,}55\times10^{-4}$ par rapport au nombre $\mathrm{e}^{0,03}$, soit un pourcentage de :

$$\frac{4{,}55\times10^{-4}}{1{,}03}\approx 0{,}00044 \text{ soit } \mathbf{0{,}04\ \%\ d'erreur}.$$

L'erreur est très faible.

Placement financier

3. a. Avec un taux de 3%, le capital est multiplié par 1,03 chaque année.

Au bout d'un an, le nouveau capital est donc $10\,000\times1{,}03=\mathbf{10\,300}$ **euros**.

Au bout de 2 ans, le capital détenu est $10\,300\times1{,}03=\mathbf{10\,609}$ **euros**.

Au bout de 5 ans, le capital détenu est :

$$10\,609\times1{,}03\times1{,}03\times1{,}03=\mathbf{11\,592{,}74}\ \textbf{euros}.$$

b. Chaque année, le capital est multiplié par 1,03 donc si l'on pose $v_0=10000$, on a : $v_{n+1}=v_n\times1{,}03$.

Le capital détenu au 1er janvier de l'année 2020 + n est bien une suite géométrique (v_n) de premier terme $v_0=10\,000$, et de raison 1,03.

c. (v_n) étant une suite géométrique, on a $v_n=v_0\times q^n=10000\times1{,}03^n$.

D'après la partie préliminaire, on a $1{,}03\approx\mathrm{e}^{0,03}$,soit $v_n\approx10000\times(\mathrm{e}^{0,03})^n$ et donc :

$$\boldsymbol{v_n\approx 10\,000\times \mathrm{e}^{0,03n}}.$$

4. a. On peut estimer qu'au bout de 6 mois : $x = 0{,}5$
$v(0{,}5) \approx 10\,000 \times e^{0{,}03\times 0{,}5} \approx 10\,151{,}13$.
Le capital acquis au bout de 6 mois sera environ de 10 151 euros.

b. Le 1er février 2021, un an et un mois se seront écoulés, donc $x = 1 + \dfrac{1}{12} = \dfrac{13}{12}$.

$v\left(\dfrac{13}{12}\right) \approx 10000 \times e^{0{,}03\times\frac{13}{12}} \approx 10330{,}34$.

Le capital détenu le 1er février 2021 sera environ de 10 330 euros.

On peut aussi calculer x en jours : $x = 1 + \dfrac{31}{365} = \dfrac{396}{365}$ mais comme nous utilisons une formule approchée, il n'est pas utile d'être si précis sur x.
De plus, le résultat obtenu est le même, à 50 cents près, ce qui est négligeable sur une somme de 10 000 euros.

c. $x = 23 + \dfrac{2}{12} = \dfrac{139}{6}$, donc :

$$v\left(\frac{139}{6}\right) \approx 10000 \times e^{0{,}03\times\frac{139}{6}} \approx 20037{,}09 .$$

Le capital détenu au bout de 23 ans et 2 mois est environ 20 037 euros.

5 a. $t = 3\%$ et $\dfrac{72}{3} = 24$.

Au **2. c.**, on a trouvé qu'en 23 ans et 2 mois, on détient environ 20 037 euros, donc on a doublé le capital en un peu moins de 24 ans.
La règle donne une valeur approchée correcte de la réponse.

b. Si $t = 10$, il faut $\dfrac{72}{10} = 7{,}2$ ans pour doubler son capital d'après la règle.

$10\,000 \times e^{0{,}1\times 7{,}2} \approx 20\,544$ € donc on aurait bien doublé le capital en 7,2 ans d'après notre approximation (et même un peu avant).
Le calcul exact donne :
en 7 ans $10\,000 \times 1{,}1^7 \approx 19\,487$ € .
En 8 ans : $10\,000 \times 1{,}1^8 \approx 21\,435$ €, donc la règle des 72 donne une bonne estimation de la réponse.

c. $e^{tx} = 2 \Leftrightarrow e^{tx} = e^{\ln 2} \Leftrightarrow tx = \ln 2 \Leftrightarrow \boldsymbol{x = \dfrac{\ln 2}{t}}$.

d. À la calculatrice, on obtient : $\ln 2 \approx 0{,}693$, donc $x \approx \dfrac{0{,}693}{t}$.

On a $v(x) \approx v_0 \times e^{xt}$, donc le capital est doublé si $e^{xt} = 2$ où t est le taux du placement, par exemple dans l'exercice $t = 0{,}03$.

Mais si on exprime le taux en pourcentage, on obtient $t = \dfrac{t'}{100}$, d'où :

$$\frac{0{,}693}{\frac{t'}{100}} = 0{,}693 \times \frac{100}{t'} = \frac{69{,}3}{t'}$$

Le temps x nécessaire pour doubler son capital est donc environ $\dfrac{70}{t'}$ où t' est le taux du placement en pourcentage, d'où la règle de Pacioli.

14 FONCTIONS COSINUS HYPERBOLIQUE ET SINUS HYPERBOLIQUE

1. a. ch et sh sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(x) = \frac{1}{2} \times e^{x} + \frac{1}{2} \times e^{-x}$ et la dérivée de e^{-x} est $-1 \times e^{-x}$,

donc $\mathrm{ch}'(x) = \frac{1}{2} \times e^{x} - \frac{1}{2} \times e^{-x} = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} = \mathrm{sh}(x)$.

Or $\mathrm{sh}(x) > 0 \Leftrightarrow e^{x} > e^{-x} \Leftrightarrow x > -x \Leftrightarrow 2x > 0 \Leftrightarrow x > 0$ et
$\mathrm{sh}(x) = 0 \Leftrightarrow x = -x \Leftrightarrow x = 0$.

La fonction ch est strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ et strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty\,;0]$.

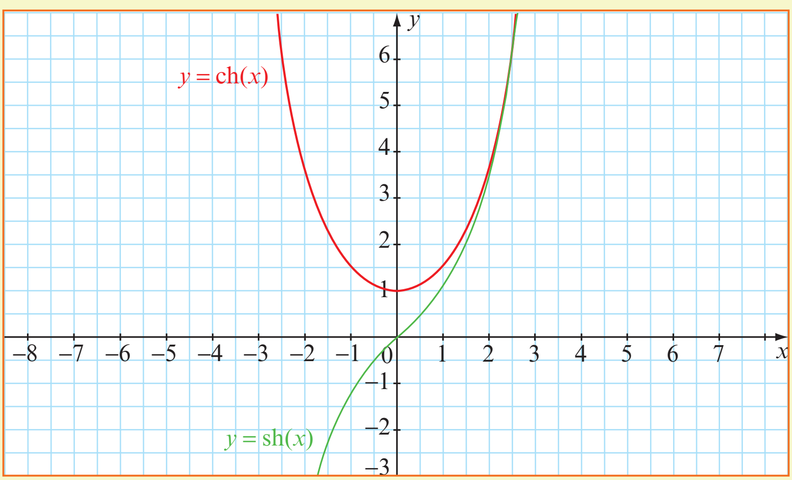
De même, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{sh}'(x) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} = \mathrm{ch}(x)$ et une exponentielle étant toujours strictement positive : $e^{x} + e^{-x} > 0$.

La fonction sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\mathrm{ch}'(x)$		$-$	0	$+$	
$\mathrm{ch}(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$	

x	$-\infty$		$+\infty$
$\mathrm{sh}'(x)$		$+$	
$\mathrm{sh}(x)$		$\nearrow$	

b.



2. a. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = \frac{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})^2}{2^2} - \frac{(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})^2}{2^2}$$

$$\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = \frac{(\mathrm{e}^x)^2 + 2\mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^{-x} + (\mathrm{e}^{-x})^2}{4} - \frac{(\mathrm{e}^x)^2 - 2\mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^{-x} + (\mathrm{e}^{-x})^2}{4}$$

$$\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = \frac{\mathrm{e}^{2x} + 2\mathrm{e}^0 + \mathrm{e}^{-2x} - \mathrm{e}^{2x} + 2\mathrm{e}^0 - \mathrm{e}^{2x}}{4} = \frac{4}{4} = 1 \text{ soit :}$$

$\mathbf{ch^2 \mathit{x} - sh^2 \mathit{x} = 1}$.

b. Soit $(x\,;\,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{sh}(x)\mathrm{ch}(y) + \mathrm{ch}(x)\mathrm{sh}(y) &= \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} \times \frac{\mathrm{e}^y + \mathrm{e}^{-y}}{2} + \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} \times \frac{\mathrm{e}^y - \mathrm{e}^{-y}}{2} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{x+y} + \mathrm{e}^{x-y} - \mathrm{e}^{-x+y} - \mathrm{e}^{-x-y}}{4} + \frac{\mathrm{e}^{x+y} - \mathrm{e}^{x-y} + \mathrm{e}^{-x+y} - \mathrm{e}^{-x-y}}{4} \\
&= \frac{2(\mathrm{e}^{x+y} - \mathrm{e}^{-x-y})}{4} = \frac{\mathrm{e}^{x+y} - \mathrm{e}^{-(x+y)}}{2} = \mathrm{sh}(x+y).
\end{aligned}$$

Pour tout x réel, avec $y = x$: $\mathbf{sh(2\mathit{x}) = 2sh(\mathit{x})ch(\mathit{x})}$.

c. Soit $(x\,;\,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{ch}(x)\mathrm{ch}(y) + \mathrm{sh}(x)\mathrm{sh}(y) &= \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} \times \frac{\mathrm{e}^y + \mathrm{e}^{-y}}{2} + \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} \times \frac{\mathrm{e}^y - \mathrm{e}^{-y}}{2} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{x+y} + \mathrm{e}^{x-y} + \mathrm{e}^{-x+y} + \mathrm{e}^{-x-y}}{4} + \frac{\mathrm{e}^{x+y} - \mathrm{e}^{x-y} - \mathrm{e}^{-x+y} + \mathrm{e}^{-x-y}}{4} \\
&= \frac{2(\mathrm{e}^{x+y} + \mathrm{e}^{-x-y})}{4} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{x+y} + \mathrm{e}^{-(x+y)}}{2} \\
&= \mathrm{ch}(x+y).
\end{aligned}$$

Pour tout x réel, avec $y = x$, $\mathbf{ch(2\mathit{x}) = ch^2(\mathit{x}) + sh^2(\mathit{x})}$,

soit, d'après **2. a.** :

$$\mathrm{ch}(2x) = \mathrm{ch}^2(x) + \mathrm{sh}^2(x) = (1 + \mathrm{sh}^2(x)) + \mathrm{sh}^2(x) = 1 + 2\mathrm{sh}^2(x)$$

$$\text{et } \mathrm{ch}(2x) = \mathrm{ch}^2(x) + \mathrm{sh}^2(x) = \mathrm{ch}^2(x) + (\mathrm{ch}^2(x) - 1) = 2\mathrm{ch}^2(x) - 1.$$

On a bien, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathbf{ch(2\mathit{x}) = 2ch^2(\mathit{x}) - 1 = 1 + 2sh^2(\mathit{x})}$.

7 Fonctions trigonométriques

Dans tout le chapitre, le plan est muni d'un repère orthonormal (O ; I, J).

I LE RADIAN, UNE NOUVELLE MESURE D'ANGLE

1. Le radian

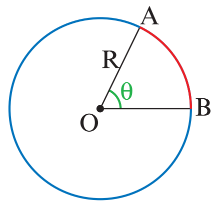
Le radian est une mesure d'angle, proportionnelle à la mesure en degrés, telle que π radians correspondent à 180°.

Mesure en radians	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	2π
Mesure en degrés	180	90	60	45	30	360

2. Arc de cercle et mesure en radians de l'angle au centre

Sur le cercle de centre O et de rayon R, si A et B sont deux points du cercle tels que $\widehat{AOB} = \theta$ radians, alors la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ est donnée par la formule :

$$\boxed{\overset{\frown}{AB} = R \times \theta}$$



II ENROULEMENT DE LA DROITE DES RÉELS SUR LE CERCLE TRIGONOMÉTRIQUE

1. Le cercle trigonométrique

On appelle **cercle trigonométrique** le cercle de centre O et de rayon 1, orienté de la manière suivante :
- le sens positif est le sens contraire au sens des aiguilles d'une montre,
- le sens négatif est le sens des aiguilles d'une montre.

2. Enroulement de la droite des réels sur le cercle trigonométrique

À tout réel t, est associé un unique point image M du cercle trigonométrique, obtenu en se déplaçant d'une longueur $|t|$ sur le cercle à partir du point I :
- dans le sens direct si t est positif,
- dans le sens indirect si t est négatif.

On dit alors que M a pour **affixe** t et on note $M(t)$.

Tout point du cercle trigonométrique est l'image d'une infinité de réels : Si t est un affixe du point M, alors tous les réels de la forme $t + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ sont également des affixes de M.

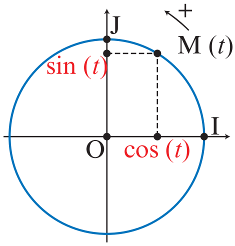
3. Cosinus et sinus d'un nombre réel

DÉFINITIONS :

Soit t un réel, et M son point image sur le cercle trigonométrique.

- On appelle **cosinus** de t, et on note $\cos(t)$ l'abscisse du point M.
- On appelle **sinus** de t, et on note $\sin(t)$, l'ordonnée du point M.

PROPRIÉTÉS :



Pour tout réel t :

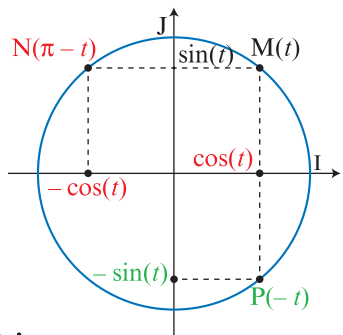
- $-1 \leqslant \cos t \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin t \leqslant 1$
- $\boxed{\cos^2 t + \sin^2 t = 1}$
- si $k \in \mathbb{Z}$, $\cos(t + 2k\pi) = \cos t$ et $\sin(t + 2k\pi) = \sin t$.

Valeurs à connaître

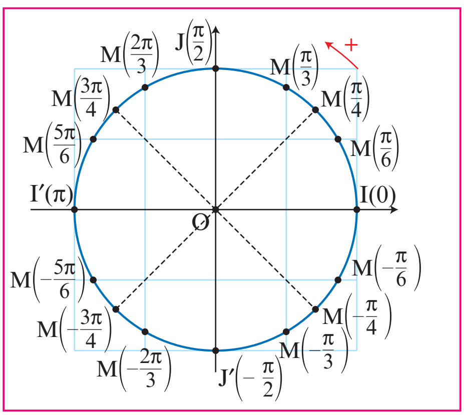
t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(t)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(t)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

PROPRIÉTÉS : ANGLES ASSOCIÉS

- Pour tout réel t :
- $\boxed{\cos(-t) = \cos(t)}$
- $\boxed{\cos(\pi - t) = -\cos(t)}$
- $\boxed{\sin(-t) = -\sin(t)}$
- $\boxed{\sin(\pi - t) = \sin(t)}$



Points remarquables du cercle trigonométrique



III FONCTIONS COSINUS ET SINUS

1. Propriétés des fonctions trigonométriques

Parité

• Pour tout réel x, $\boxed{\cos(-x) = \cos(x)}$

La fonction cos est donc **paire** : sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

• Pour tout réel x, $\boxed{\sin(-x) = -\sin(x)}$

La fonction sin est donc **impaire** : sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Périodicité

Pour tout x réel, $\boxed{\cos(x + 2\pi) = \cos(x) \text{ et } \sin(x + 2\pi) = \sin(x)}$

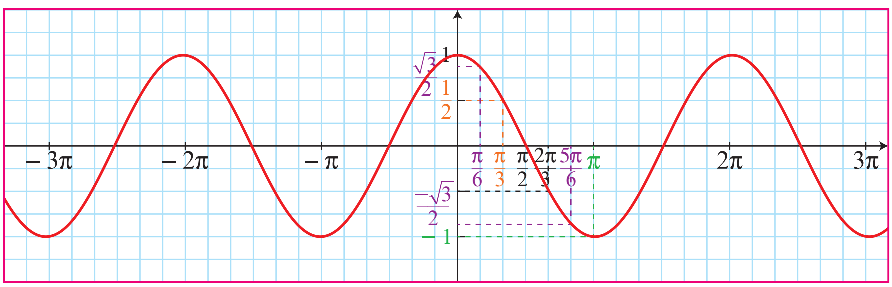
On dit que les fonctions cosinus et sinus sont **périodiques de période 2π** :
leurs courbes représentatives sont invariantes par translation de vecteur $2\pi\,\vec{i}$.

2. Variations et courbes représentatives

Le plan est ici rapporté à un repère orthogonal.

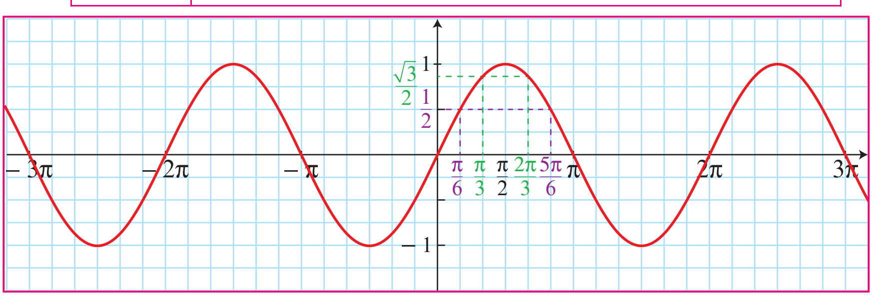
• **Pour la fonction cosinus :**

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$\cos x$	1	↘	0	↘	-1	↗	0	↗	1



• **Pour la fonction sinus :**

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$\sin x$	0	↗	1	↘	0	↘	-1	↗	0



MÉTHODE 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ une équation de la forme $\cos x = \cos a$ (ou $\sin x = \sin a$)

➜ Voir les exos 4, 8 et 17.

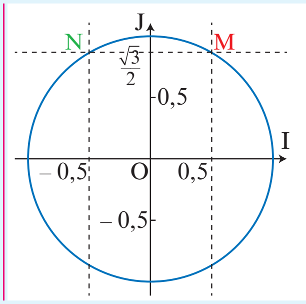
Étape 1. Placer sur le cercle trigonométrique le point M d'affixe a , puis, s'il existe, l'autre point du cercle ayant même abscisse (respectivement même ordonnée).

Étape 2. Déduire les solutions de l'équation à l'aide des résultats suivant :

- $\cos(x) = \cos(a) \Leftrightarrow x = a + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$ ou $x = -a + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$
- $\sin(x) = \sin(a) \Leftrightarrow x = a + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$ ou $x = \pi - a + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

EXERCICE RESOLU

Résoudre $\mathbb{R}$ dans l'équation $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.



CORRIGE

Étape 1. $\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Plaçons $M\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$.

L'autre point du cercle ayant pour ordonnée $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ est le point $N\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

Étape 2. $\sin(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z}) \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$$

MÉTHODE 2

Trouver $\cos(a)$ connaissant $\sin(a)$ (ou inversement)

➜ Voir les exos 5, 9 et 19.

Étape 1. Calculer $\cos^2(a)$ à l'aide de la relation : $\cos^2(a) + \sin^2(a) = 1$.

Étape 2. Déduire, de l'intervalle auquel appartient a, le signe de $\cos(a)$.

EXERCICE RESOLU

Soit b un réel vérifiant $\sin(b) = 0{,}8$, et tel que $b \in \left[\dfrac{\pi}{2} ; \pi\right]$.

Déterminer la valeur de $\cos(b)$.

CORRIGE

Étape 1. Calculons $\cos^2(b)$:

$\cos^2(b) + \sin^2(b) = 1 \Leftrightarrow \cos^2(b) + 0{,}8^2 = 1 \Leftrightarrow \cos^2(b) = 0{,}36$.

Étape 2. Comme $b \in \left[\dfrac{\pi}{2} ; \pi\right]$, on sait que $\cos(b)$ est négatif.

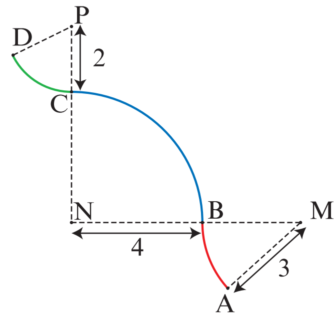
Par conséquent, $\cos(b) = -0{,}6$.

TESTER SES CONNAISSANCES

1 ARC DE CERCLE ET RADIAN

★ | 5 min | P. 212

La courbe ci-dessous est composée de trois arcs de cercle $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$ et $\overset{\frown}{CD}$, de rayons respectifs MA = 3, NB = 4 et PC = 2, et d'angles respectifs $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{3}$.
Sans calculatrice, calculer la longueur exacte de cette courbe.



2 POINTS D'AFFIXES DONNES

★ | 15 min | P. 212

a. Dans un repère orthonormal (O ; I, J), placer sur le cercle trigonométrique le point A d'affixe $\frac{\pi}{6}$, le point B d'affixe $-\frac{\pi}{4}$, le point C d'affixe $\frac{2\pi}{3}$ et le point D d'affixe $\frac{7\pi}{6}$.

b. Parmi les réels $-\frac{31\pi}{5}$, $\frac{24\pi}{5}$ et $-\frac{6\pi}{5}$, lesquels correspondent au même point du cercle trigonométrique ?

> Deux réels ont le même point image si leur différence est un multiple entier de 2π. Voir le cours I. 2.

c. À partir des points I et A, construire sur le cercle trigonométrique le point P d'affixe $\frac{\pi}{12}$.

3 LECTURE DE SINUS ET COSINUS

★ | 10 min | P. 212

Déterminer les valeurs exactes des cosinus et sinus suivants :

a. $\sin\left(\frac{-4\pi}{3}\right)$, $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$, $\sin(-\pi)$, $\sin\left(\frac{-5\pi}{6}\right)$.

b. $\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)$, $\sin\left(\frac{-17\pi}{3}\right)$, $\sin\left(\frac{29\pi}{6}\right)$.

> S'appuyer sur le tableau et les points remarquables du cercle trigonométrique donnés au II. 3.

4 ÉQUATIONS TRIGONOMÉTRIQUES | ★ | 30 min | ▸ P. 213

1. Par lecture sur le cercle trigonométrique, déterminer les réels t de l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$ tels que :

a. $\cos t = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **b.** $\sin t = -\dfrac{1}{2}$ **c.** $\cos t = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **d.** $\sin(t) = \sin\left(\dfrac{17\pi}{5}\right)$.

2. Déterminer tous les réels t tels que :

a. $\cos(t) = \cos\dfrac{\pi}{8}$ **b.** $\cos t = \dfrac{1}{2}$ **c.** $\sin t = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **d.** $\sin t = -1$

Voir la méthode 1.

5 LIEN ENTRE COS(*a*) ET SIN(*a*) | ★★ | 10 min | ▸ P. 214

a. Soit a un réel tel que $\cos(a) = \dfrac{5}{7}$.

Déterminer la valeur de $\sin(a)$, sachant que $a \in [0\,;\pi]$.

Voir la méthode 2.

b. Soit b un réel vérifiant : $b \in \left]-\pi\,;-\dfrac{\pi}{2}\right]$ et $\sin(b) = -\dfrac{4}{5}$.

Déterminer la valeur exacte de $\cos(b)$.

c. On donne :

$$\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}.$$

Calculer la valeur exacte de $\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$.

6 LIEN AVEC LA TRIGONOMETRIE DU TRIANGLE RECTANGLE | ★★ | 10 min | ▸ P. 214

1. ABC est un triangle rectangle en C avec $AB = 2\sqrt{3}$ et $BC = 3$.
Sans calculatrice, déterminer la mesure exacte, en degrés, de l'angle $\widehat{ABC}$

Se rappeler que $3 = \sqrt{3} \times \sqrt{3}$.

2. Soit MNP un triangle rectangle isocèle en P. On pose $MN = x$.

a. Exprimer en fonction de x la longueur des côtés MP et PN.

b. En déduire le périmètre $\mathscr{P}(x)$ et l'aire $\mathscr{A}(x)$ du triangle MNP.

S'ENTRAÎNER

7 RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS | ★★ | 20 min | ▸ P. 215

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a. $2\cos^2(t) - \cos(t) - 1 = 0$.

Poser $X = \cos t$.

b. $\left[2\sin(t) - 1\right] \times \left[2\sin(t) + \sqrt{2}\right] = 0$.

2. À l'aide du cercle trigonométrique, résoudre dans $]-\pi\,;\pi]$ les inéquations suivantes :

a. $\cos(t) \geqslant -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **b.** $\sin(t) < 0$ **c.** $-\dfrac{1}{2} < \cos t < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

8 VALEURS EXACTES DE COS $\frac{\pi}{3}$ ET SIN $\frac{\pi}{3}$ | 10 min | ▸ P. 216

Soit A le point du cercle trigonométrique d'affixe $\dfrac{\pi}{3}$.

On appelle H et K les projetés orthogonaux du point A sur les axes de coordonnées.

a. Calculer la mesure, en degrés, de l'angle $\widehat{IOA}$.

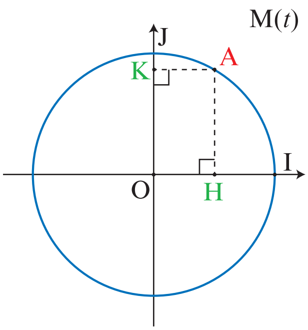
b. Quelle est la nature du triangle IOA ?

c. Justifier que H est le milieu du segment [OI].

En déduire la valeur de $\cos\dfrac{\pi}{3}$.

d. Calculer la longueur AH.

En déduire la valeur de $\sin\dfrac{\pi}{3}$.



9 ÉQUATIONS AVEC ANGLES ASSOCIÉS | ★★★ | 20 min | ▸ P. 216

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes, d'inconnue t :

a. $\sin(\pi + t) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **b.** $\sin(-t) = \dfrac{1}{2}$ **c.** $\sqrt{2}\sin(\pi - t) + 1 = 0$

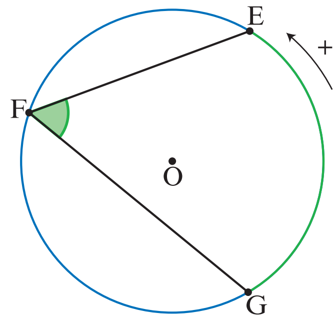
Voir les propriétés des angles associés dans le cours.

d. $\cos(2t) = 1$ **e.** $\sin(2t) = \sin\dfrac{\pi}{3}$.

10 ANGLE INSCRIT ET ANGLE AU CENTRE | ★ | 10 min | P. 217

Le cercle représenté ci-contre a pour centre O et pour rayon 10.

Sachant que $\widehat{EFG} = \frac{\pi}{5}$ radians, calculer la longueur de l'arc $\overset{\frown}{EG}$.



> Sur un cercle, l'angle au centre qui intercepte un petit arc $\overset{\frown}{AB}$ est le double de tout angle inscrit qui intercepte le même arc.

11 FONCTION $x \mapsto \cos(ax+b)$ | ★★★ | 30 min | P. 217

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right).$$

1. Calculer $f(0)$ et $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

2. Démontrer que pour tout réel x, $f(x+2\pi) = f(x)$.
Qu'en déduit-on pour la courbe représentative de la fonction f ?

3. Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$; on note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f et $\mathscr{C}_g$ celle de la fonction $g : x \mapsto \cos(x)$.

a. Soit x un réel, on considère les points :

$$M(x\,;f(x)) \text{ et } N\left(x+\frac{\pi}{3};\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right).$$

Vérifier $N \in \mathscr{C}_g$ puis calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{NM}$.

b. En déduire que $\mathscr{C}_f$ est l'image de $\mathscr{C}_g$ par une translation de vecteur $\vec{u}$ dont on précisera les coordonnées.

> **Rappel :** un point M′ est l'image d'un point M par la translation de vecteur $\vec{u}$ si, et seulement si, $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.

4. Représenter graphiquement la courbe de la fonction f.

12 ALGORITHME | ★ | 20 min | P. 218

a. Soit n un entier naturel. La division euclidienne de n par 4 s'écrit :

$$n = 4 \times q + r\text{, avec } 0 \leqslant r \leqslant 3.$$

Montrer qu'alors $\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{r\pi}{2}\right)$.

b. Calculer $\sin\left(\frac{r\pi}{2}\right)$ pour chacune des valeurs de r possibles.

c. Appliquer l'algorithme ci-dessous pour $n = 184$, $n = 227$ puis $n = 501$.

Variables :	n est un entier naturel
	r est un entier naturel
	s est un réel
Initialisation :	Saisir n
Traitement :	« reste de la division euclidienne de n par 4 » $\rightarrow$ r
	Si r = 1 alors 1 $\rightarrow$ s
	Et si r = 3 alors –1 $\rightarrow$ s
	Sinon 0 $\rightarrow$ s
Sortie :	Afficher texte : « la valeur de $\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ est : »
	Afficher variable : s

d. Traduire en langage Python cet algorithme.

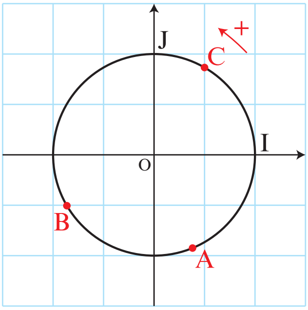
e. Le tester sur les valeurs de n de la question **c.**, puis déterminer la valeur de $\sin\left(\frac{-315\pi}{2}\right)$.

PRÉPARER UN CONTRÔLE

13 QCM

★ | 10 min | P. 219

Dans le plan muni du repère orthonormal direct $(O; I; J)$, on considère le cercle trigonométrique.



1. Le point B a pour affixe :

a. $\frac{-3\pi}{4}$ **b.** $\frac{7\pi}{6}$ **c.** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ **d.** $\frac{5\pi}{6}$.

2. Le point A a pour affixe :

a. $\frac{\pi}{5}$ **b.** $\frac{-2\pi}{5}$ **c.** $\frac{-3\pi}{5}$ **d.** $-\frac{\pi}{5}$.

3. Le triangle OIC est :

a. équilatéral **b.** isocèle non équilatéral **c.** isocèle rectangle

d. quelconque.

14 PROBLÈME

★★ | 40 min | P. 220

Le plan est muni du repère orthonormal direct $(O; I; J)$.

1. M désigne un point du cercle trigonométrique d'affixe t, avec $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$, et M′ le symétrique de M par rapport à l'axe (OJ).

On veut exprimer, en fonction de t, l'aire $\mathcal{A}(t)$ du triangle JMM′.

a. Faire une figure.

b. Quelle est la nature du triangle JMM′ ? Justifier.

c. Déterminer les coordonnées des points M′ et du milieu H de [MM′].
d. Exprimer en fonction de t la distance MM′ et la distance JH.
e. Établir alors que, pour tout $t \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$, $\mathscr{A}(t) = \cos(t)\times(1-\sin(t))$.
f. Calculer $\mathscr{A}\left(\frac{\pi}{6}\right)$, $\mathscr{A}\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et $\mathscr{A}\left(\frac{\pi}{3}\right)$.
2. On considère maintenant le point M du cercle trigonométrique d'affixe $t = -\frac{\pi}{6}$, et M′ son symétrique par rapport à l'axe (OJ).
a. Faire une figure.
b. Calculer l'aire du triangle isocèle JMM′.
c. Vérifier qu'elle est encore égale à $\cos(t)\times(1-\sin(t))$.

ALLER PLUS LOIN

15 TENSION $U(T)$ EN FONCTION DE T | ★★★ | 40 min | P. 022100

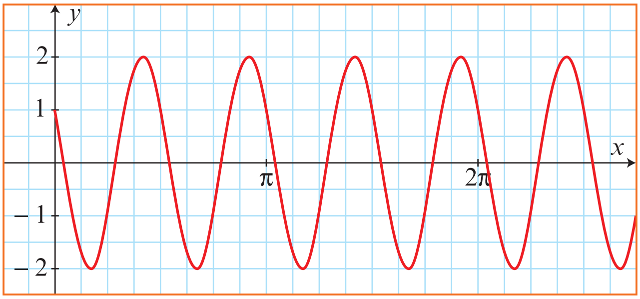
1. Une tension U (en Volts) aux bornes d'un générateur s'exprime en fonction du temps t (en secondes) par $U(t) = 10\times\cos\left(\frac{1}{2}t-\frac{\pi}{4}\right)$.
a. Calculer U(0) et U(4 π).
b. Si t décrit l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, entre quelles valeurs varie $T = \frac{1}{2}t - \frac{\pi}{4}$?
En déduire le sens de variation U sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

Utiliser les variations de la fonction cos.

c. De même, à l'aide les variations de la fonction cos, compléter le tableau suivant :

Variable t	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{2}$	4π
Variable $T = \frac{1}{2}t - \frac{\pi}{4}$				
Variations de U				

2. La courbe page suivante a été obtenue à l'aide d'un oscilloscope.
Elle représente une tension U en fonction du temps t, liés par une relation de la forme $U(t) = U_{max}\times\cos(\omega t+\varphi)$, où U_{max}, ω et φ sont des constantes réelles, avec $\varphi \in [0\,;\pi]$.



a. Lire graphiquement la valeur de U_{max}.
b. Déterminer graphiquement la plus petite période T de la fonction U.

On pourra compter le nombre de périodes sur $[0\,;2\pi]$.

c. À l'aide de la formule $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$, déterminer la valeur exacte de ω.
d. En admettant que $U(0)=1$, déterminer la valeur exacte de φ.
e. Donner l'expression de $U(t)$ en fonction de t.

16 VALEURS EXACTES DE $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$ ET DE $\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$

★★★ | 30 min | P. 222

Dans le plan muni du repère orthonormal $(O\,;I\,;J)$, on note A le point du cercle trigonométrique d'affixe $\dfrac{\pi}{4}$ et B le milieu du segment $[AI]$. Faire une figure à compléter au fur et à mesure.
a. Déterminer, en justifiant, la mesure en radians de l'angle $\widehat{IOB}$.
b. Déterminer les coordonnées du point du point B, puis la valeur exacte de la distance OB.

Soit C le point défini par $\overrightarrow{OC} = \dfrac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\overrightarrow{OB}$.

c. Démontrer que C est l'intersection de la demi-droite $[OB)$ et du cercle trigonométrique.

Si $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$, alors $AB = |k| \times CD$.

d. Déterminer les coordonnées de C.

Pour simplifier l'expression de l'ordonnée y_C, on montrera que :

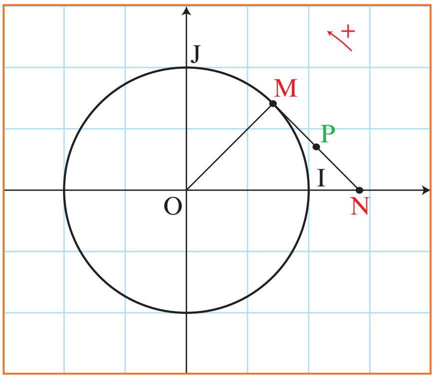
$$\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}\times\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2\times\sqrt{2}}.$$

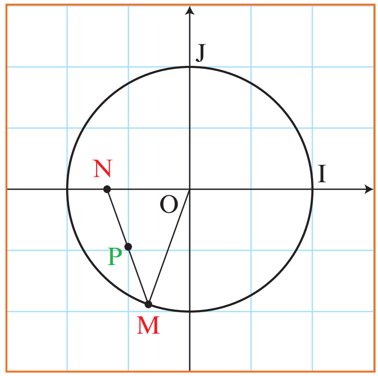
e. En déduire les valeurs exactes de $\cos\dfrac{\pi}{8}$ et de $\sin\dfrac{\pi}{8}$.

17 CERCLE ET ELLIPSE

★★ | 35 min | ▶ p. 223

Un système articulé est composé de deux tiges [OM] et [MN] de même longueur égale à 1 telles que :
– le point O est fixe,
– le point M se déplace sur le cercle de centre O et de rayon 1,
– le point N reste sur un rail confondu avec l'axe des abscisses.
On appelle P le milieu du segment [MN].
On s'intéresse à la trajectoire du point P, lorsque M parcourt le cercle.





Le plan est muni du repère (O ; I, J), et orienté dans le sens direct.
On note t l'affixe du point M qui est dans l'intervalle $]-\pi\,;\pi\,]$.

1. Exprimer, en fonction de t, les coordonnées du point M.

2. Soit H le pied de la hauteur issue de M dans le triangle OMN.

a. Démontrer que H est le milieu du segment [ON].

b. En déduire les coordonnées du point N, en fonction de t.

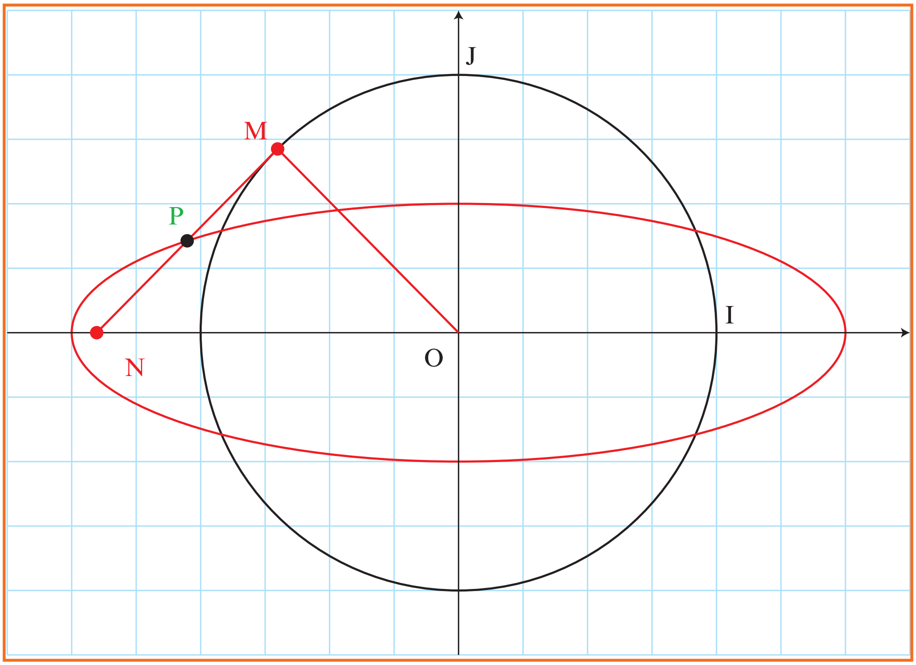
3. Établir alors que le milieu P de [MN] a pour coordonnées :

$$\left(\frac{3}{2}\cos(t)\,;\frac{1}{2}\sin(t)\right).$$

4. Compléter le tableau suivant :

Affixe du point M	t	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{3}$
Abscisse de M(t)	$\cos t$					
Abscisse de P(t)	$\frac{3}{2}\cos t$					
Ordonnée de M(t)	$\sin t$					
Ordonnée de P(t)	$\frac{1}{2}\sin t$					

5. On a tracé dans le repère ci-dessous la trajectoire du point P ; c'est une ellipse. Placer avec précision sur le graphique les points P(0), $P\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $P\left(\frac{\pi}{6}\right)$, $P\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ et $P\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.



CORRIGÉS

1 ARC DE CERCLE ET RADIAN

La longueur d'un arc de cercle s'obtient en multipliant le rayon par la mesure en radians de l'angle au centre qui l'intercepte.

$\overset{\frown}{AB} = MA \times \widehat{AMB} = 3 \times \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$;

$\overset{\frown}{BC} = 4 \times \frac{\pi}{2} = 2\pi$ et $\overset{\frown}{CD} = 2 \times \frac{\pi}{3}$.

La longueur de la courbe vaut donc $\frac{3\pi}{4} + 2\pi + \frac{2\pi}{3} = \mathbf{\frac{41\pi}{12}}$.

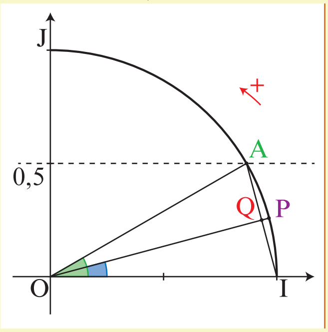
2 POINTS D'AFFIXES DONNÉS

a.

Voir le paragraphe II.3. du cours : Points remarquables du cercle trigonométrique.

b. $\frac{24\pi}{5} - \left(-\frac{31\pi}{5}\right) = \frac{55\pi}{5} = 11\pi = 2\pi \times 5{,}5$, donc $-\mathbf{\frac{31\pi}{5}}$ **et** $\mathbf{\frac{24\pi}{5}}$ **n'ont pas le même point image.**

$\frac{24\pi}{5} - \left(-\frac{6\pi}{5}\right) = \frac{30\pi}{5} = 6\pi = 3 \times 2\pi$, donc $\mathbf{\frac{24\pi}{5}}$ **et** $-\mathbf{\frac{6\pi}{5}}$ **ont le même point image.**



c. Le point A a pour affixe $\frac{\pi}{6}$ donc $\widehat{IOA} = \frac{\pi}{6}$ (radian). Sa bissectrice partage donc l'angle $\widehat{IOA}$ en deux angles de mesure $\frac{\pi}{12}$.

Or, le triangle IOA étant isocèle en O, sa bissectrice est confondue avec sa médiane. On construit donc le milieu Q de [IA] puis le point P, intersection de la demi-droite [OQ) et du cercle trigonométrique.

3 LECTURE DE SINUS ET COSINUS

a. • $-\frac{4\pi}{3} + 2\pi = -\frac{4\pi}{3} + \frac{6\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$, donc $\sin\left(-\frac{4\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

• $\mathbf{\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}}$ • $\mathbf{\sin(-\pi) = 0}$ • $\mathbf{\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}}$

b. • $\frac{5\pi}{4} - 2\pi = -\frac{3\pi}{4}$, donc $\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

• $-\frac{17\pi}{3} + 2\pi = -\frac{11\pi}{3} \leqslant -\pi$; $-\frac{11\pi}{3} + 2\pi = -\frac{5\pi}{3} \leqslant -\pi$;

$-\frac{5\pi}{3} + 2\pi = \frac{\pi}{3} \in]-\pi ; \pi]$. Donc $\mathbf{\sin\left(-\frac{17\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}}$.

- $\dfrac{29\pi}{6} - 2\pi = \dfrac{17\pi}{6} > \pi$; $\dfrac{17\pi}{6} - 2\pi = \dfrac{5\pi}{6} \in]-\pi ; \pi]$.

Donc $\mathbf{\sin\left(\dfrac{29\pi}{6}\right) = \sin\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2}}$.

4 ÉQUATIONS TRIGONOMÉTRIQUES

1. a. $\cos t = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \boldsymbol{t = \dfrac{\pi}{6}}$ **ou** $\boldsymbol{t = -\dfrac{\pi}{6}}$.

Voir la méthode 1.

b. $\sin t = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \boldsymbol{t = -\dfrac{\pi}{6}}$ **ou** $\boldsymbol{t = -\dfrac{5\pi}{6}}$.

c. $\cos t = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \boldsymbol{t = \dfrac{3\pi}{4}}$ **ou** $\boldsymbol{t = -\dfrac{3\pi}{4}}$.

d. $\sin\left(\dfrac{17\pi}{5}\right) = \sin\left(-\dfrac{3\pi}{5}\right)$ car $\dfrac{17\pi}{5} - 4\pi = -\dfrac{3\pi}{5} \in]-\pi ; \pi]$ donc :

$$\sin t = \sin\left(\frac{17\pi}{5}\right) \Leftrightarrow \sin t = \sin\left(-\frac{3\pi}{5}\right)$$

$$\Leftrightarrow t = -\frac{3\pi}{5} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z}) \text{ ou}$$

$$t = \pi - \left(-\frac{3\pi}{5}\right) + 2k\pi (k \in \mathbb{Z}) \text{ et } t \in]-\pi ; \pi]$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{t = -\frac{3\pi}{5}} \textbf{ ou } \boldsymbol{t = -\frac{2\pi}{5}}$$

car $\dfrac{8\pi}{5} - 2\pi = -\dfrac{2\pi}{5} \in]-\pi ; \pi]$.

2. a. $\cos(t) = \cos\dfrac{\pi}{8} \Leftrightarrow \boldsymbol{t = \dfrac{\pi}{8} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})}$ **ou** $\boldsymbol{t = -\dfrac{\pi}{8} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})}$.

b. $\cos t = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \cos t = \cos\dfrac{\pi}{3}$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{t = \frac{\pi}{3} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})} \textbf{ ou } \boldsymbol{t = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})}.$$

c. $\sin t = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin t = \sin\dfrac{\pi}{4}$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{t = \frac{\pi}{4} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})} \textbf{ ou } \boldsymbol{t = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})}.$$

d. $\sin t = -1 \Leftrightarrow \boldsymbol{t = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})}$.

5 LIEN ENTRE COS(a) ET SIN(a)

a. $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$ soit $\left(\frac{5}{7}\right)^2 + \sin^2 a = 1$, d'où $\sin^2 a = 1 - \frac{25}{49} = \frac{24}{49}$.

$\sin a = \sqrt{\frac{24}{49}} = \frac{2\sqrt{6}}{7}$ ou $\sin a = -\sqrt{\frac{24}{49}} = -\frac{2\sqrt{6}}{7}$.

Comme $a \in [0\,;\pi]$, $\sin a > 0$ et donc $\boldsymbol{\sin a = \frac{2\sqrt{6}}{7}}$.

b. $\cos^2 b + \sin^2 b = 1$ soit $\cos^2 b + \left(-\frac{4}{5}\right)^2 = 1$,

D'où $\cos^2 b = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$ et donc $\cos b = \frac{3}{5}$ ou $\cos b = -\frac{3}{5}$.

Comme $b \in \left]-\pi ; -\frac{\pi}{2}\right]$, $\cos b < 0$, d'où : $\boldsymbol{\cos b = -\frac{3}{5}}$.

c. $\cos^2\left(\frac{7\pi}{12}\right) + \sin^2\left(\frac{7\pi}{12}\right) = 1$ d'où :

$\cos^2\left(\frac{7\pi}{12}\right) + \frac{2+\sqrt{3}}{4} = 1$;

$\cos^2\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{2-\sqrt{3}}{4} (> 0)$.

D'où $\cos\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ ou $\cos\frac{7\pi}{12} = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$.

Comme $\frac{7\pi}{12} \in \left]\frac{\pi}{2} ; \pi\right[$, $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) < 0$ et $\boldsymbol{\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}}$.

6 LIEN AVEC LA TRIGONOMETRIE DU TRIANGLE RECTANGLE

1. ABC a pour hypoténuse le côté [AB].

$$\cos\widehat{ABC} = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \frac{BC}{AB}$$
$$= \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

donc $\widehat{ABC} = \frac{\pi}{6}$(radians) $= 30\,°$.

2. a. MNP étant rectangle isocèle en P, $\widehat{NMP} = \frac{\pi}{4} = \widehat{MNP}$.

$\cos\widehat{NMP} = \frac{MP}{MN}$ et $\cos\widehat{NMP} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ donc $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{MP}{x}$.

On a donc : NP = MP = $\boldsymbol{\frac{x\sqrt{2}}{2}}$.

b. $\mathcal{P}(x) = MN + MP + NP = x + 2\times\frac{x\sqrt{2}}{2} = \boldsymbol{x(1+\sqrt{2})}$.

$\mathcal{A}(x) = \frac{MP \times NP}{2} = \frac{1}{2}\times\left(\frac{x\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \boldsymbol{\frac{x^2}{4}}$.

7 RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS

1. a. $2X^2 - X - 1 = 0$; $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 9$.

$X = \dfrac{1-3}{4} = -\dfrac{1}{2}$ ou $X = \dfrac{1+3}{4} = 1$.

D'où $2\cos^2 t - \cos t - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos t = -\dfrac{1}{2}$ ou $\cos t = 1$

$\Leftrightarrow \cos t = \cos\dfrac{2\pi}{3}$ ou $\cos t = \cos 0$

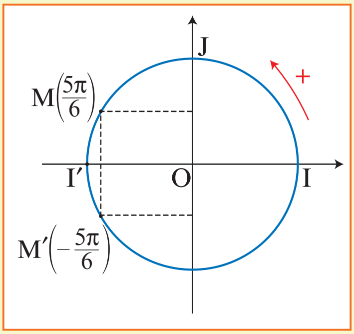
$\Leftrightarrow \boldsymbol{t = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi}$ **ou** $\boldsymbol{t = -\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi}$ **ou** $\boldsymbol{t = 2k\pi (k \in \mathbb{Z})}$.

b. $(2\sin t - 1)(2\sin t + \sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow \sin t = \dfrac{1}{2}$ ou $\sin t = \dfrac{-\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow \sin t = \sin\dfrac{\pi}{6}$ ou $\sin t = \sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{t = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi}$ **ou** $\boldsymbol{t = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi}$ **ou** $\boldsymbol{t = -\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi}$ **ou** $\boldsymbol{t = -\dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})}$.

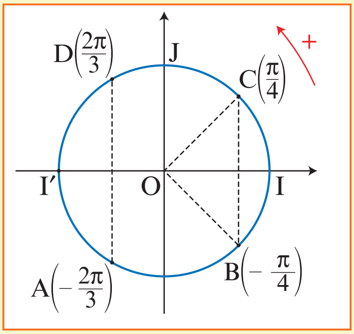
2. a.



$\cos t \geqslant -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos t \geqslant \cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \boldsymbol{t \in \left[-\dfrac{5\pi}{6} ; \dfrac{5\pi}{6}\right]}$

b. $\sin t < 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{t \in]-\pi ; 0[}$.

c.



$-\dfrac{1}{2} \leqslant \cos t < \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \boldsymbol{t \in \left[-\dfrac{2\pi}{3} ; -\dfrac{\pi}{4}\right[\cup \left]\dfrac{\pi}{4} ; \dfrac{2\pi}{3}\right]}$.

Pour déterminer les intervalles, parcourir le cercle trigonométrique à partir du point I′ et en tournant dans le sens positif.

8 VALEURS EXACTES DE COS $\frac{\pi}{3}$ ET SIN $\frac{\pi}{3}$

a. La mesure en radians de l'angle $\widehat{\text{IOA}}$ est égale à l'affixe du point A, d'où $\widehat{\text{IOA}} = \frac{\pi}{3}$ **radians = 60°**.

b. Le triangle IOA est isocèle en O (OI = OA = 1) avec un angle de 60° donc il est **équilatéral**.

c. Le triangle IOA étant équilatéral, sa hauteur (AH) est aussi sa médiane, donc H est le milieu du segment [OI].

Donc $\cos\frac{\pi}{3} = x_H = \mathbf{\frac{1}{2}}$.

d. Dans le triangle OAH rectangle en H, le théorème de Pythagore donne :

$$OH^2 + AH^2 = OA^2,$$

soit $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + AH^2 = 1^2$; $AH^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$;

$AH = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ car $AH \geqslant 0$.

On a donc : $\mathbf{\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}}$.

9 ÉQUATIONS AVEC ANGLES ASSOCIÉS

a. $\sin(\pi + t) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow -\sin t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow \sin t = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow \sin t = \sin\frac{\pi}{3}$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{t = \frac{\pi}{3} + 2k\pi}$ **ou** $\boldsymbol{t = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})}$.

b. $\sin(-t) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\sin t = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \sin t = -\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \sin t = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow t = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $\Leftrightarrow t = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{t = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi}$ **ou** $\boldsymbol{t = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})}$.

c. $\sqrt{2}\sin(\pi - t) + 1 = 0 \Leftrightarrow \sin(\pi - t) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow \sin t = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow \sin t = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{t = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi}$ **ou** $\boldsymbol{t = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})}$.

d. $\cos(2t)=1 \Leftrightarrow \cos(2t)=\cos(0)$
$\Leftrightarrow 2t = 0+2k\pi (k\in\mathbb{Z})$ ou $2t=-0+2k\pi(k\in\mathbb{Z})$
$\Leftrightarrow 2t = 0+2k\pi (k\in\mathbb{Z})$
$\Leftrightarrow t = k\pi (k\in\mathbb{Z})$
$\Leftrightarrow \boldsymbol{t = 0+2k\pi(k\in\mathbb{Z})}$ **ou** $\boldsymbol{t=\pi+2k\pi(k\in\mathbb{Z})}$ **.**

e. $\sin(2t)=\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow 2t=\frac{\pi}{3}+2k\pi(k\in\mathbb{Z})$ ou $2t=\pi-\frac{\pi}{3}+2k\pi(k\in\mathbb{Z})$.
$\Leftrightarrow t=\frac{\pi}{6}+k\pi(k\in\mathbb{Z})$ ou $t=\frac{\pi}{3}+k\pi(k\in\mathbb{Z})$
$\Leftrightarrow t=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $t=\frac{\pi}{6}+\pi+2k\pi$ ou $t=\frac{\pi}{3}+2k\pi(k\in\mathbb{Z})$ ou $t=\frac{\pi}{3}+\pi+2k\pi(k\in\mathbb{Z})$.
$\Leftrightarrow \boldsymbol{t=\frac{\pi}{6}+2k\pi}$ **ou** $\boldsymbol{t=-\frac{5\pi}{6}+2k\pi}$ **ou** $\boldsymbol{t=\frac{\pi}{3}+2k\pi}$ **ou** $\boldsymbol{t=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi\ (k\in\mathbb{Z})}$

10 ANGLE INSCRIT ET ANGLE AU CENTRE

$\widehat{EOG}$ et $\widehat{EFG}$ interceptent le même petit arc $\widehat{EG}$, donc $\widehat{EOG}=\frac{2\pi}{5}$.

D'où $\widehat{EG}=10\times\frac{2\pi}{5}=\boldsymbol{4\pi}$.

Voir le cours I.2.

11 FONCTION $x \mapsto \cos(ax+b)$

1. $f(0)=\cos\left(0+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$; $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=\boldsymbol{0}$.

2. Soit $x\in\mathbb{R}$.

$$f(x+2\pi)=\cos\left(x+2\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$$

car la fonction cosinus est 2π-périodique.
Donc, pour tout $x\in[0\,;+\infty[$, $f(x+2\pi)=f(x)$.
La fonction f est périodique de période 2π et sa courbe est invariante par translation de vecteur $2\pi\vec{i}$.

3. a. Soit x un réel :

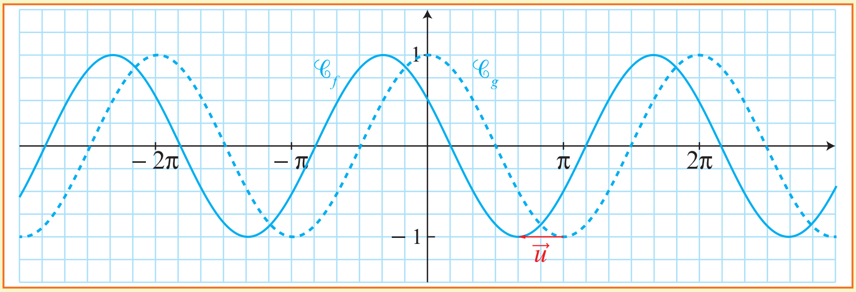
$$y_N=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\Leftrightarrow y_N=\cos(x_N)$$
$$\Leftrightarrow y_N=g(x_N)\Leftrightarrow N\in\mathscr{C}_g.$$

De plus, $y_M=f(x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=y_N$.

$\overrightarrow{NM}\begin{pmatrix}x_M-x_N\\y_M-y_N\end{pmatrix}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{NM}\begin{pmatrix}-\frac{\pi}{3}\\0\end{pmatrix}$.

b. En posant $\vec{u} = -\frac{\pi}{3}\vec{i}$, on a $\overrightarrow{NM} = \vec{u}$; cela signifie que M est l'image de N par la translation de vecteur $\vec{u}$ et donc la courbe $\mathscr{C}_f$ est l'image de $\mathscr{C}_g$ par la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} -\frac{\pi}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$.

4. Sur le graphique suivant, on a tracé $\mathscr{C}_f$ en gras et $\mathscr{C}_g$ en pointillés :



12 ALGORITHME

a. $\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{(4q+r)\pi}{2}\right) = \sin\left(2\pi q + r\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{r\pi}{2}\right)$ car la fonction sinus est 2π-périodique.

b. Si $r = 0$, $\sin\left(\frac{r\pi}{2}\right) = \sin(0) = 0$; si $r = 1$, $\sin\left(\frac{r\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$;
si $r = 2$, $\sin\left(\frac{r\pi}{2}\right) = \sin(\pi) = 0$; si $r = 3$, $\sin\left(\frac{r\pi}{2}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$.

c.

Variables :	n est un entier naturel
	r est un entier naturel
	s est un réel
Initialisation :	Saisir n
Traitement :	« reste de la division euclidienne de n par 4 » $\longrightarrow$ r
	Si r = 1 alors 1 $\longrightarrow$ s
	Et si r = 3 alors –1 $\longrightarrow$ s
	Sinon 0 $\longrightarrow$ s
Sortie :	Afficher texte : « la valeur de $\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ est : »
	Afficher variable : s

- Pour $n = 184$, on a : 184 = 4*46+0 donc $r = 0$ et $s = 0$.
- Pour $n = 227$, on a : 227 = 4*56+3 donc $r = 3$ et $s = -1$.
- Pour $n = 502$, on a : 501 = 4*125+1 donc $r = 1$ et $s = 1$.

d.

```
def sinus_multiple_pi_sur_2(n) :
    reste=n%4
    if reste==0 or reste==2 :
       sinus=0
    elif reste==1 :
       sinus=1
    else:
       sinus=–1
    return sinus

# Test de la fonction pour n allant de 0 à 4
for n in range(5) :
    print('la valeur de sinus', n, 'fois pi/2 est', sinus_multiple_pi_sur_2(n))

# Test de la fonction pour n=184
for n in [184 ; 227 ; 501]:
    print('la valeur de sinus', n, 'fois pi/2 est', sinus_multiple_pi_sur_2(n))
```

```
Console Python
la valeur de sinus 0   fois pi/2 est 0
la valeur de sinus 1   fois pi/2 est 1
la valeur de sinus 2   fois pi/2 est 0
la valeur de sinus 3   fois pi/2 est –1
la valeur de sinus 4   fois pi/2 est 0
la valeur de sinus 184 fois pi/2 est 0
la valeur de sinus 227 fois pi/2 est –1
la valeur de sinus 501 fois pi/2 est 1
```

e. $\sin\left(\frac{-315\pi}{2}\right)=-\sin\left(\frac{315\pi}{2}\right)$.

Le programme Python donne pour $n = 315$ la valeur –1, donc $\sin\left(\frac{-315\pi}{2}\right)=1$.

13 QCM

1. Réponse b.

$y_B=-\frac{1}{2}$ et $x_B<0$, donc $B\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$.

De plus, $-\frac{5\pi}{6}+2\pi=-\frac{5\pi}{6}+\frac{12\pi}{6}=\frac{7\pi}{6}$.

2. Réponse b.

$0<x_A<\frac{1}{2}$, donc A a une affixe dans l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2};-\frac{\pi}{3}\right[$.

Comparons les réels $-\frac{2\pi}{5}$; $-\frac{3\pi}{5}$; $-\frac{\pi}{5}$ avec $-\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{3}$ en les mettant au même dénominateur : $2\times5\times3$.

$-\dfrac{2\pi}{5}=\dfrac{-12\pi}{30}$; $-\dfrac{3\pi}{5}=\dfrac{-18\pi}{30}$; $-\dfrac{\pi}{5}=-\dfrac{6\pi}{30}$; $-\dfrac{\pi}{2}=-\dfrac{15\pi}{30}$ et $-\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{10\pi}{30}$.

Seul $-\dfrac{2\pi}{5}$ est compris entre $-\dfrac{\pi}{2}$ et $-\dfrac{\pi}{3}$.

3. Réponse a.

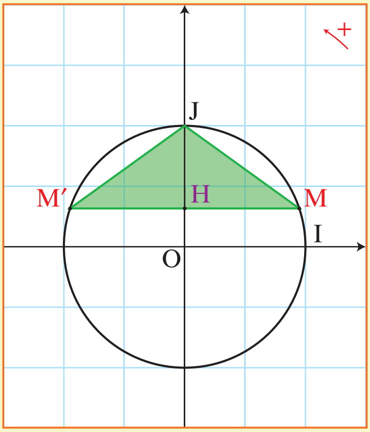
OIC est isocèle en O car OI = OC = 1.

De plus, $\widehat{IOC}=\dfrac{\pi}{3}$, d'où $\widehat{OIC}=\widehat{OCI}=\dfrac{1}{2}\left(\pi-\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{\pi}{3}$.

Le triangle OIC est donc équilatéral.

14 PROBLÈME

1. a.



b. J étant situé sur l'axe des ordonnées, qui est la médiatrice de [MM′], on sait que J est équidistant des points M et M′. JMM′ **est isocèle en J.**

c. $M(\cos(t);\sin(t))$, $M'(-\cos(t);\sin(t))$ et :

$$H\left(\frac{\cos(t)+(-\cos(t))}{2};\frac{\sin(t)+\sin(t)}{2}\right).$$

Soit $\mathbf{H(0;\sin(t))}$.

d. $MM'=\sqrt{(x_{M'}-x_M)^2+(y_{M'}-y_M)^2}=\sqrt{(-2\cos t)^2+0^2}=\sqrt{4\cos^2(t)}$

Comme $t\in\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$, $\cos(t)>0$ donc $\mathbf{MM'=2\cos(t)}$.

Les points O, H, J étant alignés dans cet ordre, $\mathbf{JH=OJ-OH=1-\sin(t)}$.

e. Soit $t\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$, $\mathcal{A}(t)=\dfrac{MM'\times JH}{2}=\dfrac{2\times\cos(t)\times(1-\sin(t))}{2}$

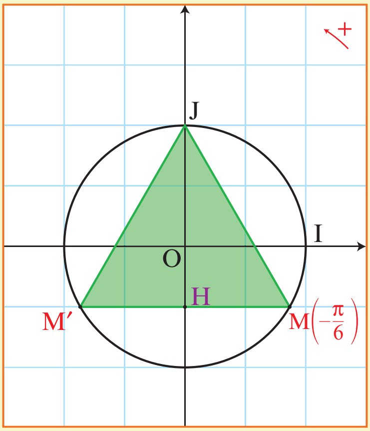
$\boldsymbol{\mathcal{A}(t)=\cos(t)\times(1-\sin(t))}$.

f. $\mathcal{A}\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\times\left(1-\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\left(1-\dfrac{1}{2}\right)=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{4}}$.

$\mathcal{A}\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\times\left(1-\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}}$.

$\mathcal{A}\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\times\left(1-\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\right)=\dfrac{1}{2}\times\left(1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=\boldsymbol{\dfrac{2-\sqrt{3}}{4}}$.

2. a.



b. L'aire du triangle JMM′ est $\dfrac{\text{JH} \times \text{MM}'}{2}$ avec $\text{M}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} ; -\dfrac{1}{2}\right)$ et $\text{M}'\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2};-\dfrac{1}{2}\right)$ et $\text{H}\left(0 ; -\dfrac{1}{2}\right)$.

On a donc :

$$\text{JH} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \text{ et } \text{MM}' = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

Donc l'aire de JMM′ vaut $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$.

c. $\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) \times \left(1 - \sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \times \left(1 + \dfrac{1}{2}\right) = \boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{3}}{4}}$.

15 TENSION *U*(*T*) EN FONCTION DE *T*

1. a. $\text{U}(0) = 10 \times \cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = 10 \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \mathbf{5\sqrt{2}}$.

La fonction cosinus étant 2π -périodique,

$$\text{U}(4\pi) = 10 \times \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) = 10 \times \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$
$$= 10 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \mathbf{5\sqrt{2}}.$$

b. On a :

$$0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 \leqslant \frac{1}{2}t \leqslant \frac{\pi}{4}$$
$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} \leqslant \frac{1}{2}t - \frac{\pi}{4} \leqslant 0$$
$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} \leqslant \text{T} \leqslant 0$$

Donc, lorsque *t* varie de 0 à $\dfrac{\pi}{2}$, T varie de $-\dfrac{\pi}{4}$ à 0.

Puisque la fonction cos est croissante sur $\left[-\dfrac{\pi}{4} ; 0\right]$, alors la fonction $\text{U} : t \mapsto \cos\left(\dfrac{1}{2}t - \dfrac{\pi}{4}\right)$ est également croissante sur $\left[0 ; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

c. Pour compléter le tableau, on a utilisé :

- La fonction cos est croissante sur les intervalles $\left[-\frac{\pi}{4};0\right]$ et $\left[\pi;\frac{7\pi}{4}\right]$.
- La fonction cos est décroissante sur $[0;\pi]$.

Variable t	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{2}$	4π
Variable $T = \frac{1}{2}t - \frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	π	$\frac{7\pi}{4}$
Variations de U	$5\sqrt{2}$ ↗	10 ↘	-10 ↗	$5\sqrt{2}$

2. a. $U_{max} = 2$.

b. Sur $[0;2\pi]$ il y a 4 périodes, donc $T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

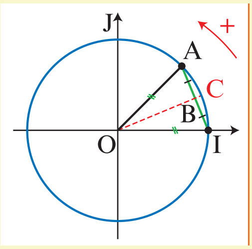
La courbe est invariable par translation de vecteur $\frac{\pi}{2}\vec{i}$ et la fonction U est périodique de période $\frac{\pi}{2}$.

c. $\omega = \dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 2\pi \times \frac{2}{\pi} = 4$.

d. $U(0) = U_{max} \times \cos(\omega t + \varphi) = 2\cos(4 \times 0 + \varphi) = 2\cos\varphi$ et $U(0) = 1$, donc $2\cos\varphi = 1$, soit $\cos\varphi = \frac{1}{2}$. Comme $\varphi \in [0;\pi]$, forcément $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

e. Pour tout $t \geqslant 0$, $\mathbf{U(t) = 2\cos\left(4t + \frac{\pi}{3}\right)}$.

16 VALEURS EXACTES DE $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ ET DE $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$



a. Le triangle OIA étant isocèle en O(OI = OA = 1), sa médiane (OB) est confondue avec la bissectrice de l'angle $\widehat{IOA}$.

Donc, comme $\widehat{IOA} = \frac{\pi}{4}$, $\mathbf{\widehat{IOB} = \frac{\pi}{8}}$.

b. • $B\left(\dfrac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2};\dfrac{0+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}\right)$, soit $B\left(\frac{2+\sqrt{2}}{4};\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$.

• $OB = \sqrt{\left(\frac{2+\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{4+4\sqrt{2}+2}{16} + \frac{2}{16}} = \frac{\sqrt{8+4\sqrt{2}}}{4}$

$OB = \frac{2\sqrt{2+\sqrt{2}}}{4}$, soit $OB = \mathbf{\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}$.

c. • $\overrightarrow{OC} = k\overrightarrow{OB}$ avec $k = \dfrac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} > 0$. **Donc C appartient à [OB]**.

• $OC = \dfrac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \times OB = \dfrac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \times \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} = 1$,

donc **C appartient au cercle de centre O et de rayon 1.**

d. Les coordonnées de C sont égales à celles du vecteur $\overrightarrow{OC}$.

$\overrightarrow{OC} = \dfrac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\overrightarrow{OB}$ a pour coordonnées :

$$\left(\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \times \frac{2+\sqrt{2}}{4} ; \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \times \frac{\sqrt{2}}{4}\right).$$

D'où $\mathbf{C\left(\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} ; \dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2+\sqrt{2}}}\right)}$.

> Pour améliorer l'écriture de y_C, multiplions numérateur et dénominateur par le conjugué de $\sqrt{2+\sqrt{2}}$, c'est-à-dire par $\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

$$y_C = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{2-\sqrt{2}}}{2 \times \sqrt{2^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2}} = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{2-\sqrt{2}}}{2 \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

e. C est le point du cercle trigonométrique d'affixe $\dfrac{\pi}{8}$, donc $C\left(\cos\dfrac{\pi}{8} ; \sin\dfrac{\pi}{8}\right)$.

On déduit du **d.** que :

$$\mathbf{\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \text{ et } \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}.$$

17 CERCLE ET ELLIPSE

1. $\mathbf{M(\cos t ; \sin t)}$.

2. a. OM = MN, donc le triangle OMN est isocèle en M, donc sa hauteur issue de M, (MH), est confondue avec sa médiane, donc H est le milieu du segment [ON].

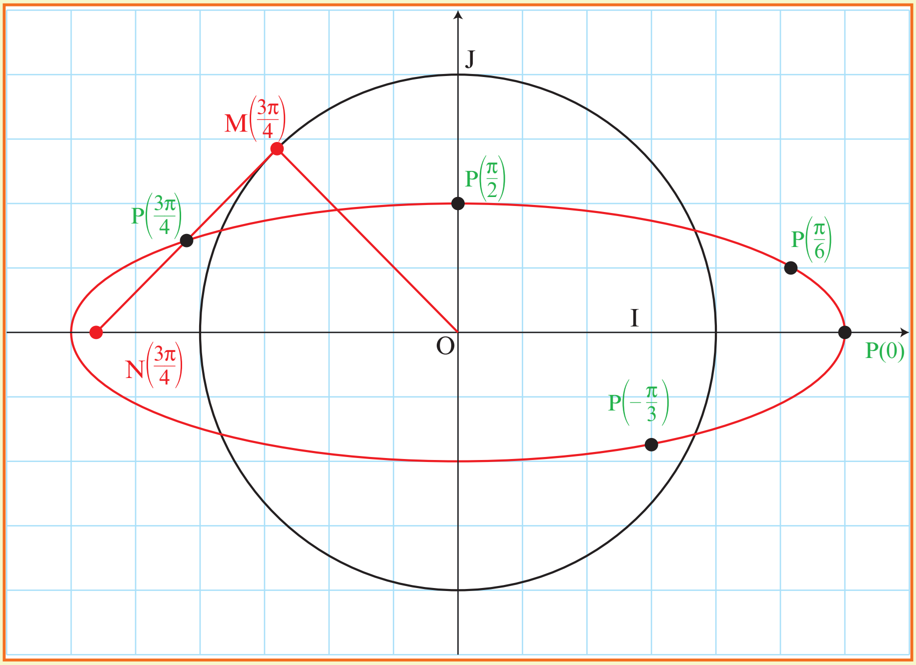
b. O(0 ; 0) et H($\cos t$; 0), de plus H est le milieu de [ON], donc N($2\cos t$; 0).

3. $P\left(\dfrac{\cos t + 2\cos t}{2} ; \dfrac{\sin t + 0}{2}\right)$, soit $P\left(\dfrac{3}{2} \times \cos t ; \dfrac{1}{2}\sin t\right)$.

4.

Affixe du point M	t	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{3}$
Abscisse de M(t)	$\cos t$	1	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Abscisse de P(t)	$\frac{3}{2}\cos t$	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$-\frac{3\sqrt{2}}{4}$	$\frac{3}{4}$
Ordonnée de M(t)	$\sin t$	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
Ordonnée de P(t)	$\frac{1}{2}\sin t$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	$-\frac{\sqrt{3}}{4}$

5.



Probabilités et statistiques

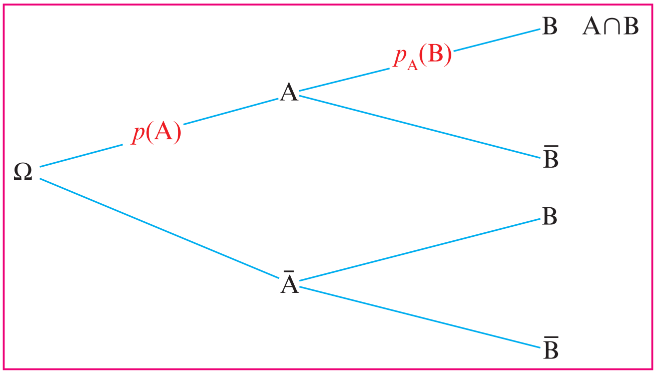
8 Probabilités conditionnelles

I ARBRES PONDÉRÉS

1. Arbres et probabilités conditionnelles

DÉFINITION : Soit A et B deux événements avec $p(\mathrm{A}) \neq 0$, on appelle **probabilité conditionnelle** de B sachant A le nombre $p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = \dfrac{p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{p(\mathrm{A})}$.

Cette égalité s'écrit également : $p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) \times p(\mathrm{A})$.
Ainsi, en pondérant la branche reliant A à B par la probabilité de B sachant A, on trouve la probabilité de $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ en multipliant les probabilités le long des branches.



PROPRIÉTÉ (RÈGLE DES NŒUDS) : La somme des probabilités rencontrées sur les branches partant d'un même événement est égale à 1.
Par exemple :

$$p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) + p_{\mathrm{A}}(\overline{\mathrm{B}}) = 1.$$

Ceci généralise la propriété $p(\mathrm{A}) + p(\overline{\mathrm{A}}) = 1$, et peut s'étendre au cas où 3, 4 ,..., n branches partent d'un même événement.

2. Formule des probabilités totales

PROPRIÉTÉ (FORMULE DES PROBABILITÉS TOTALES) :
La probabilité de B s'obtient en ajoutant les probabilités des branches qui aboutissent à B. Autrement dit :

$$\boxed{p(\mathrm{B}) = p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) + p(\overline{\mathrm{A}} \cap \mathrm{B}) = p(\mathrm{A}) \times p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) + p(\overline{\mathrm{A}}) \times p_{\overline{\mathrm{A}}}(\mathrm{B})}$$

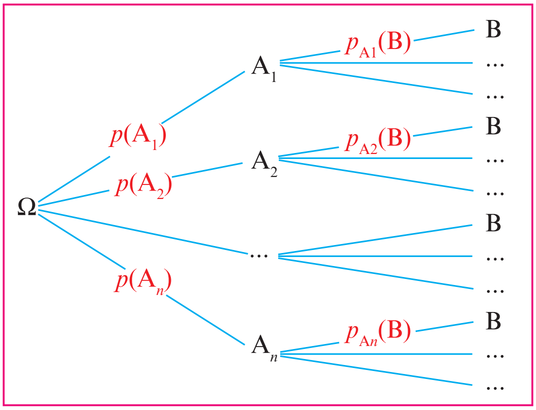
GÉNÉRALISATION :

Si A_1, A_2, …, A_n forment une partition de l'univers, c'est-à-dire si $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ et les A_i sont deux à deux disjoints, alors :

$$\boxed{p(B) = p(A_1 \cap B) + p(A_2 \cap B) + \ldots + p(A_n \cap B)}$$

donc si $p(A_i) \neq 0$ pour tout i :

$$\boxed{p(B) = p(A_1) \times p_{A_1}(B) + p(A_2) \times p_{A_2}(B) + \ldots + p(A_n) \times p_{A_n}(B)}$$



II INDÉPENDANCE

DÉFINITION :

Deux événements A et B sont **indépendants** lorsque :

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B).$$

Si $p(A) \neq 0$, A et B sont indépendants si, et seulement si, $p_A(B) = p(B)$.

CONSÉQUENCE :

Lors de n expériences successives indépendantes :

$$\boxed{p(E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_n) = p(E_1) \times p(E_2) \times \ldots \times p(E_n)}$$

Voir les exercices 8, 12 et 15.

MÉTHODE 1

Construire et exploiter un arbre pondéré

➜ Voir les exos 1 à 7, 9 à 13, 15 et 16.

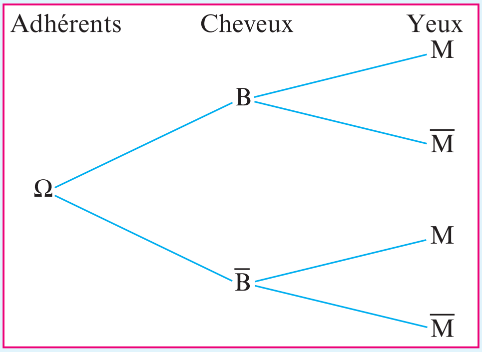
Étape 1. On traduit la situation avec un arbre non pondéré.
On utilise les notations éventuellement imposées par l'énoncé.
Étape 2. On détermine les probabilités issues de chaque nœud (penser à utiliser la loi des nœuds !), puis on pondère les branches.
Étape 3. On repère la ou les branches qui mènent à l'événement cherché.
On multiplie les probabilités rencontrées le long des branches.
On utilise si besoin la formule des probabilités totales.

Exo résolu

Dans un club de sport, 40 % des adhérents sont blonds ; parmi les adhérents blonds, 20 % ont les yeux marron et parmi les autres, 50 % ont les yeux marron.
On choisit un adhérent au hasard.
On note B l'événement : « l'adhérent choisi est blond » et M l'événement « l'adhérent choisi a les yeux marron ».
1. Déterminer la probabilité que l'adhérent choisi ait les cheveux blonds et les yeux marron.
2. Déterminer la probabilité que l'adhérent choisi ait les yeux marron.

CORRIGÉ

1. Étape 1. On classe les individus par la couleur de leurs cheveux, puis par la couleur de leurs yeux :



Étape 2. Pour le premier nœud : on calcule $p(B)$.
Comme le choix de l'adhérent se fait au hasard, il y a équiprobabilité de ce choix, donc $p(B) = \dfrac{40}{100} = 0{,}4$.
On en déduit :

$$p(\overline{B}) = 1 - p(B) = 0{,}6 .$$

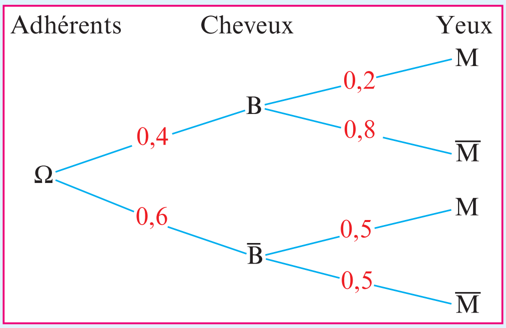
Pour les nœuds de deuxième rang, on calcule $p_{\mathrm{B}}(\mathrm{M})$.
Sachant que l'adhérent est blond, il aura les yeux marron avec probabilité

$$p_{\mathrm{B}}(\mathrm{M}) = \frac{20}{100} = 0,2.$$

On en déduit $p_{\mathrm{B}}(\overline{\mathrm{M}}) = 1 - 0,2 = 0,8$.
On calcule $p_{\overline{B}}(\mathrm{M})$.
Sachant que l'adhérent n'est pas blond, il aura les yeux marron avec probabilité :

$$p_{\overline{B}}(\mathrm{M}) = \frac{50}{100} = 0,5\,.$$

On en déduit $p_{\overline{\mathrm{B}}}(\overline{\mathrm{M}}) = 1 - 0,5 = 0,5.$



On aurait pu commencer par la couleur des cheveux, mais on n'aurait pas su tirer de l'énoncé la probabilité de B sachant M.

Étape 3. 1. On cherche $p(\mathrm{B} \cap \mathrm{M})$.
C'est la première branche qui mène à $\mathrm{B} \cap \mathrm{M}$.
On multiplie les probabilités rencontrées le long de cette branche :

$$\begin{aligned} p(\mathrm{B} \cap \mathrm{M}) &= p(\mathrm{B}) \times p_{\mathrm{B}}(\mathrm{M}) \\ &= 0,4 \times 0,2 \\ &= \mathbf{0,08}. \end{aligned}$$

Attention à ne pas confondre $p(\mathrm{B} \cap \mathrm{M})$ et $p_{\mathrm{B}}(\mathrm{M})$.

2. On cherche $p(\mathrm{M})$.
On localise les branches qui finissent par M :
– la première qui correspond à $\mathrm{B} \cap \mathrm{M}$;
– la troisième qui correspond à $\overline{\mathrm{B}} \cap \mathrm{M}$.
On multiplie les probabilités rencontrées le long des branches :

$$\begin{aligned} p(\mathrm{M}) &= p(\mathrm{B}) \times p_{\mathrm{B}}(\mathrm{M}) + p(\overline{\mathrm{B}}) \times p_{\overline{\mathrm{B}}}(\mathrm{M}) \\ &= 0,4 \times 0,2 + 0,6 \times 0,5 \\ &= \mathbf{0,38}. \end{aligned}$$

MÉTHODE 2

Déterminer si deux événements A et B sont indépendants

➜ Voir les exos 2, 10 et 14.

Étape 1. On détermine $p(\mathrm{A})$, $p(\mathrm{B})$ et $p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$.

Étape 2. On calcule $p(\mathrm{A}) \times p(\mathrm{B})$.

Étape 3. On compare $p(\mathrm{A}) \times p(\mathrm{B})$ et $p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$: s'ils sont égaux, les événements A et B sont indépendants, sinon ils ne le sont pas.

Il ne s'agit pas de se fier à son intuition !

Exo résolu

Dans l'exemple précédent, les événements B et M sont-ils indépendants ?

CORRIGÉ

Étape 1. On a déjà calculé $p(\mathrm{B}) = 0,4$, $p(\mathrm{M}) = 0,38$ et $p(\mathrm{B} \cap \mathrm{M}) = 0,08$.

Étape 2. On calcule $p(\mathrm{B}) \times p(\mathrm{M}) = 0,4 \times 0,38$
$= 0,152$.

Étape 3. Donc $p(\mathrm{B}) \times p(\mathrm{M}) \neq p(\mathrm{B} \cap \mathrm{M})$:
les événements B et M ne sont pas indépendants.

Comme $p(\mathrm{B}) \neq 0$, on peut aussi comparer $p_{\mathrm{B}}(\mathrm{M}) = 0,2$ et $p(\mathrm{M}) = 0,38$:
$p_{\mathrm{B}}(\mathrm{M}) \neq p(\mathrm{M})$, donc B et M ne sont pas indépendants.

TESTER SES CONNAISSANCES

1 DO YOU SPEAK ENGLISH ?

★ | 10 min | ▸ P. 241

Une société comprend 65 % de cadres, et parmi ceux-ci, 70 % parlent anglais. Chez les autres employés, seuls 40 % parlent anglais.
On interroge un employé de la société au hasard.
On note C l'événement : « la personne interrogée est un cadre » et A l'événement : « la personne interrogée parle anglais ».

a. Déterminer $p(C)$ et $p_C(A)$.

b. Construire un arbre pondéré rendant compte de l'énoncé.
On pourra utiliser $\overline{C}$ et $\overline{A}$, les événements contraires de C et A.

Voir la méthode 1.

c. En déduire la probabilité que cet employé soit un cadre parlant anglais.

Voir la méthode 1.

d. Quelle est la probabilité qu'on interroge un employé parlant anglais ?

Il faut comptabiliser toutes les branches débouchant sur A.

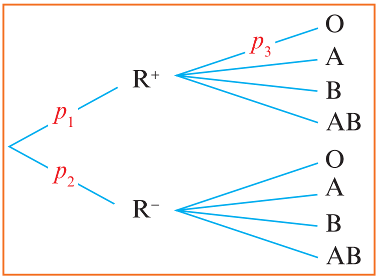
2 GROUPES ET RHÉSUS

★ | 10 min | ▸ P. 241

Voici la répartition des principaux groupes sanguins en France :

	Groupe O	Groupe A	Groupe B	Groupe AB
Rhésus +	35,0 %	38,1 %	6,2 %	2,8 %
Rhésus –	9,0 %	7,2 %	1,2 %	0,5 %

On choisit une personne au hasard dans la population française.
On note R^+ l'événement : « la personne a le rhésus + » ;
O l'événement :« la personne est du groupe O » etc ..
On a représenté un arbre illustrant cette expérience aléatoire.



a. Déterminer p_1 et p_2.

b. Donner une interprétation en langage courant de p_3, puis calculer p_3.
c. Quelle est la probabilité qu'une personne appartenant au groupe O soit de rhésus positif ?

Deux méthodes sont possibles : exploiter l'arbre ou ne considérer que les personnes de groupe O parmi les *N* habitants de la France.

d. Les événements R^+ et O sont-ils indépendants ?

Voir la méthode 2.

3 BLACK OR WHITE ?

★ | 15 min | ▸ P. 242

Dans une urne U_1, il y a quatre boules noires et six boules blanches.
Dans une urne U_2, il y a trois boules noires et sept boules blanches.
Les boules sont indiscernables au toucher.
On choisit une urne au hasard, puis on tire au hasard une boule dans cette urne. On note A l'événement :« on choisit U_1 » et N l'événement : « la boule tirée est noire ».
a. Représenter l'épreuve par un arbre non pondéré que vous compléterez au fur et à mesure.
b. Calculer $p(A)$.
c. Donner une interprétation en langage courant, puis calculer $p_A(N)$ et $p_{\overline{A}}(N)$. Pondérer l'arbre.
d. Donner une interprétation en langage courant, puis calculer :

$$p(N \cap A),\ p(N \cap \overline{A}) \text{ et } p(N).$$

e. En déduire la probabilité d'avoir choisi l'urne U_1 sachant qu'on a tiré une boule noire.

En cas de difficultés revoir la méthode 1.

4 T'AS DE BEAUX YEUX…

★ | 15 min | ▸ P. 244

Le pot de fin d'année des professeurs rassemble 45 hommes et 55 femmes. 40 % des femmes ont les yeux bleus.
Au total, 50 professeurs ont les yeux bleus.
1. Compléter le tableau d'effectifs suivant à l'aide des données.

Yeux / Sexe	Bleus	Non bleus	Total
Hommes			
Femmes			
Total			

2. Une personne est désignée au hasard.
On note F :« la personne désignée est une femme » et
B : « la personne désignée a les yeux bleus ».
a. Calculer la probabilité des événements :
« cette personne est une femme » ;
« cette personne est une femme aux yeux bleus » ;
« cette personne est un homme aux yeux bleus. »
b. Quelle est la probabilité que cette personne ait les yeux bleus sachant que c'est un homme ?

> Deux méthodes sont possibles : utiliser la formule de définition des probabilités conditionnelles ou ne considérer que la ligne des hommes.

c. Sachant que cette personne a les yeux bleus, quelle est la probabilité que cette personne soit une femme ?
3. Construire deux arbres pondérés pouvant correspondre à cette expérience aléatoire.

> On peut commencer par distinguer les individus suivant leur sexe… ou suivant la couleur de leurs yeux.

5 FIABILITÉ D'UN TEST

★ | 15 min | ▸ P. 245

Une maladie contagieuse est en train de causer la disparition d'une espèce animale. 50 % des animaux sont déjà malades. Un laboratoire de recherche a mis au point un test de dépistage de cette maladie :
si un animal est malade, le test est positif dans 99 % des cas ;
si un animal n'est pas malade, le test est positif dans 0,1 % des cas.
On examine un animal de cette espèce pris au hasard.
On note M l'événement :« l'animal est malade », $\overline{M}$ son événement contraire et T l'événement : « le test est positif ».
a. Déterminer $p(M)$, $p_M(T)$ et $p_{\overline{M}}(T)$.

> Il faut simplement traduire les données de l'énoncé.

b. En déduire $p(T)$.

> Commencez par construire un arbre pondéré (voir la méthode 1).

c. Le laboratoire estime qu'un test est fiable si sa valeur prédictive positive, c'est-à-dire la probabilité qu'un animal soit malade sachant que le test est positif, est supérieure à 0,999.
Ce test est-il fiable ?

6 CALIBRAGE

★ | 20 min | ▸ P. 246

Dans un supermarché, trois producteurs « a », « b » et « c » fournissent respectivement 25 %, 35 % et 40 % des pommes vendues.
Certaines de ces pommes sont hors calibre, dans les proportions suivantes : 5 % pour le producteur « a », 4 % pour le producteur « b » et 1 % pour le producteur « c ».
On prend une pomme au hasard et on définit les événements suivants :
A : « La pomme vient du producteur « a » » ; B : « La pomme vient du producteur « b » » ; C : « La pomme vient du producteur « c » » ; D : « La pomme est hors calibre. »
Les résultats seront donnés à 10^{-4} près.

a. Traduire les données de l'énoncé en utilisant les notations des probabilités et construire un arbre pondéré illustrant la situation.

Pour la construction de l'arbre pondéré, voir la méthode 1.

b. Calculer $p(\text{D})$.

c. Quelle est la probabilité qu'une pomme vienne du producteur « a » sachant qu'elle est hors calibre ?

d. Calculer la probabilité qu'une pomme vienne du producteur « c » sachant qu'elle n'est pas hors calibre.

S'ENTRAÎNER

7 TIRAGES AVEC REMISE

★★ | 10 min | ▸ P. 247

Une urne contient trois boules vertes, deux jaunes et une rouge, indiscernables au toucher. On tire successivement, et avec remise, deux boules de cette urne. Déterminer la probabilité de l'événement M : « obtenir deux boules de la même couleur. »

8 NAISSANCES INDÉPENDANTES

★★ | 15 min | ▸ P. 247

Dans une maternité, on observe n naissances, n entier strictement positif. On admet que dans cette maternité la probabilité qu'un nouveau né soit une fille est de 0,49. Les naissances sont supposées indépendantes.
On veut déterminer le nombre minimal de naissances nécessaires pour que la probabilité qu'il naisse au moins une fille dépasse 0,95.

a. Démontrer que la question revient à déterminer la plus petite valeur de l'entier $n > 0$ pour laquelle :

$$1 - 0{,}51^n > 0{,}95.$$

Penser à l'événement contraire.

b. Écrire un script en Python pour trouver cette valeur de n.

Il s'agit d'écrire un algorithme qui s'arrête dès qu'une condition est réalisée… donc il doit continuer *Tant que…*

9 IL NEIGE

★★ | 15 min | ▶ P. 248

En hiver, Monsieur Prudent sort de chez lui chaussé de bottes 8 fois sur 10. Il les met systématiquement lorsqu'il neige, et une fois sur trois lorsqu'il ne neige pas. On vient de croiser Monsieur Prudent avec ses bottes.
Quelle est la probabilité qu'il ne neige pas ?

On note p la probabilité qu'il neige un jour d'hiver.
Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré afin d'obtenir une équation d'inconnue p.
Résoudre cette équation, puis traduire la question à l'aide des probabilités conditionnelles.

10 CONTRÔLE DE QUALITÉ

★★ | 40 min | ▶ P. 249

Pour fabriquer un appareil on utilise successivement et dans cet ordre deux machines M_1 et M_2. La machine M_1 peut provoquer deux défauts d_1 et d_2.
Un relevé statistique permet d'estimer que :
• 4 % des appareils présentent le défaut d_1, et lui seul ;
• 2 % des appareils présentent le défaut d_2, et lui seul ;
• 1 % des appareils présentent à la fois les défauts d_1 et d_2.

1. On prélève au hasard un appareil à la sortie de M_1.
On note A l'événement : « l'appareil présente le défaut d_1 »
et B l'événement : « l'appareil présente le défaut d_2 ».

a. Calculer les probabilités des événements A et B notées respectivement $p(\mathrm{A})$ et $p(\mathrm{B})$.
Les événements A et B sont-ils indépendants ?

Voir la méthode 2.

b. Quelle est la probabilité pour que l'appareil présente le défaut d_1 sachant qu'il présente le défaut d_2 ?

c. Soit D l'événement : « l'appareil présente au moins un défaut ».
Montrer que la probabilité de l'événement D est égale à 0,07.

d. Quelle est la probabilité pour que l'appareil ne présente aucun défaut ?

2. À la sortie de la machine M_1, les appareils en cours de fabrication passent par la machine M_2 qui peut provoquer un défaut d_3 dans les conditions suivantes :
• 60 % des appareils ayant au moins un défaut en sortant de M_1 présentent le défaut d_3 ;

• 3 % des appareils sans défaut à la sortie de M_1 présentent le défaut d_3.
On prélève au hasard un appareil après les passages successifs dans les machines M_1 et M_2.
On ne s'intéresse ici qu'aux événements C : « l'appareil présente le défaut d_3 » et D : « l'appareil présente au moins un défaut en sortant de M_1 ».
a. Traduire les informations précédentes à l'aide d'un arbre pondéré.

On a déjà étudié D à la question 1.

b. Quelle est la probabilité que l'on fabrique un appareil sans aucun défaut ?

PRÉPARER UN CONTRÔLE

11 UN DÉ, DEUX URNES

★★ | 20 min | ▸ P. 250

Une urne U contient trois boules noires et une blanche, une urne V deux boules noires et deux blanches.
Toutes ces boules sont indiscernables au toucher.
On lance un dé régulier à six faces et si on obtient 1, on tire une boule au hasard dans U, sinon on tire une boule au hasard dans V.
a. Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche ?

On pourra introduire les événements A : « l'urne choisie est U » et B : « la boule choisie est blanche » puis construire un arbre pondéré.

b. On a tiré une boule blanche.
Quelle est la probabilité que le dé ait donné un 1 ?

12 SURPRISE !

★★ | 20 min | ▸ P. 251

Un fan de la série « Mégablaster » collectionne les images de ses héros préférés. Chaque semaine, il achète une pochette surprise contenant une image. Les images vendues chaque semaine sont indépendantes les unes des autres et représentent Destructor 1 fois sur 5, Protector 1 fois sur 2 et un autre super-héros dans le reste des cas.
Au bout de trois semaines, quelle est la probabilité des événements :
a. M : « il a eu exactement deux images de Destructor » ?
b. N : « il a eu l'image de Destructor avant celle de Protector » ?
c. U : « il n'a jamais eu l'image de Destructor » ?

13 À BICYCLETTE

★★ | 15 min | ▸ P. 252

Pour se rendre au lycée, Axelle utilise le vélo ou le bus.
Lorsque la journée est ensoleillée, Axelle se rend au lycée en vélo 8 fois sur 10. Lorsque la journée n'est pas ensoleillée, Axelle se rend au lycée en vélo 5 fois sur 10. La probabilité qu'une journée soit ensoleillée, dans la ville où habite Axelle, est notée p.

Pour une journée donnée, on note :

• E l'événement : « La journée est ensoleillée »;

• V l'événement : « Axelle se rend au lycée en vélo ».

1. Déterminer les valeurs de $p_E(V)$ et de $p_{\overline{E}}(V)$.

2. Construire l'arbre pondéré représentant la situation.

On a rencontré cette situation à l'exercice 9.

3. Montrer que la probabilité que Axelle se rend au lycée en vélo lors d'une journée donnée est $p(V) = 0{,}3p + 0{,}5$.

4. On constate que dans 68 % des cas, c'est en vélo que Axelle s'est rendue au lycée.

a. Calculer la valeur de p.

b. Sachant que Axelle a utilisé son vélo pour se rendre au lycée, montrer que la probabilité que la journée soit ensoleillée est $\dfrac{12}{17}$.

ALLER PLUS LOIN

14 DÉ TRUQUÉ

★★★ | 30 min | ▸ P. 252

On dispose d'un dé à 6 faces. On désigne par p_k (k entier compris entre 1 et 6) la probabilité d'obtenir, lors d'un lancer, la face numérotée k.

Ce dé est pipé de sorte que :

• les faces ne sont pas équiprobables ;

• les nombres $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$ dans cet ordre sont six termes consécutifs d'une suite arithmétique ;

• les nombres p_1, p_2, p_4 dans cet ordre sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique.

1. Démontrer que $p_k = \dfrac{k}{21}$ pour tout entier k compris entre 1 et 6.

Pour diminuer le nombre d'inconnues, on essayera d'abord d'exprimer les p_i uniquement à l'aide de p_1 et de la raison r de la suite arithmétique, puis on trouvera un lien entre r et la raison q de la suite géométrique.

2. On lance ce dé une fois et on considère les événements suivants :
A : « le nombre obtenu est pair » ;
B : « le nombre obtenu est supérieur ou égal à 3 » ;
C : « le nombre obtenu est 3 ou 4 ».
a. Calculer la probabilité de chacun de ces événements.

> Décomposer ces événements à l'aide des événements élémentaires.

b. Calculer la probabilité que le nombre obtenu soit supérieur ou égal à 3, sachant qu'il est pair.

> Exploiter la formule de définition d'une probabilité conditionnelle.

c. Les événements A et B sont-ils indépendants ?
Les événements A et C sont-ils indépendants ?

> Voir la méthode 2.

d. Reprendre la question **c.** en supposant cette fois le dé bien équilibré.

15 JOLIE POUPÉE

★★★ | 25 min | ▶ P. 254

À la fête foraine, une petite fille a vu une poupée qui lui plaît beaucoup : il suffit à son papa Guillaume de crever un ballon pour l'obtenir.
Pour n euros ($n \in \mathbb{N}^*$), il a le droit de lancer $2n$ fléchettes (on suppose qu'il les lance toutes, même s'il crève un ballon dès la première).
On suppose qu'à chaque lancer, il a 7 chances sur 10 de crever un ballon.
a. Déterminer la probabilité qu'une mise de 3 euros ne suffisent pas pour gagner la poupée.
b. Guillaume décide de tenter une partie à 4 euros.
Quelle est la probabilité qu'il crève un ballon seulement à la dernière fléchette ?
c. Cette poupée est vraiment jolie. Guillaume la veut absolument !
Quelle somme minimale doit-il payer pour avoir moins d'une chance sur un million de partir sans la poupée ?
On pourra écrire un script en Python qui détermine le seuil cherché.

> Voir le cours sur les répétitions d'expériences et l'exercice 8 pour le script.

16 DÉPISTAGE SYSTÉMATIQUE | ★★★ | 40 min | ▸ P. 254

Une maladie atteint une fraction x (comprise entre 0 et 1) d'une population. On veut tester systématiquement tous les individus de cette population pour savoir s'ils sont porteurs de la maladie. Un laboratoire pharmacologique produit un test de dépistage dont les caractéristiques sont les suivantes :

• la probabilité qu'un individu atteint ait un test positif est $0{,}99$;

• la probabilité qu'un individu non atteint ait un test négatif est $0{,}99$.

On teste un individu au hasard dans la population.

On note A l'événement :« l'individu est atteint »

et T l'événement : « le test est positif ».

On va étudier la valeur prédictive positive du test $p_T(A)$, c'est-à-dire la probabilité qu'un individu dont le test est positif soit effectivement atteint.

1. Construire un arbre pondéré de cette expérience aléatoire.

2. Calculer la probabilité de l'événement T.

3. a. Établir que la valeur prédictive positive $p_T(A)$ du test est donnée par la fonction :

$$f(x) = \frac{99x}{98x+1}.$$

Sans autre information dans l'énoncé, on utilise la formule de définition de $p_T(A)$: voir le cours.

b. Étudier les variations de la fonction f sur $[0;1]$.

c. Reproduire et compléter le tableau suivant.

Arrondir à 10^{-4} près.

x	0,001	0,01	0,1	0,5	0,9
$p_T(A)$					

d. En déduire l'inconvénient majeur de ce test s'il s'agit d'une maladie rare.

Que devient x dans le cas d'une maladie rare ?

e. Que devient l'efficacité de ce test si on ne l'applique qu'à une population présentant des symptômes de la maladie ?

4. a. Démontrer que la probabilité $p_{\overline{T}}(\overline{A})$ qu'un individu ayant un test négatif ne soit pas atteint est donnée par la formule $f(1-x)$.

b. Quel est le sens de variation de $x \mapsto f(1-x)$ sur $[0;1]$?

c. En déduire que si $x < 0{,}1$, alors $p_{\overline{T}}(\overline{A}) > 0{,}998$.

d. Que peut-on en déduire pour un individu dont le test est négatif dans le cas d'une maladie rare ?

CORRIGÉS

1 DO YOU SPEAK ENGLISH ?

a. Le choix de l'employé s'effectue au hasard, il y a donc équiprobabilité de ces choix. La probabilité d'interroger un cadre est égale à la proportion des cadres :

$$\boldsymbol{p(\mathrm{C}) = \frac{65}{100} = 0,65}.$$

Sachant que l'employé interrogé est un cadre, il parle anglais s'il fait partie des 70 % de cadres parlant anglais, donc :

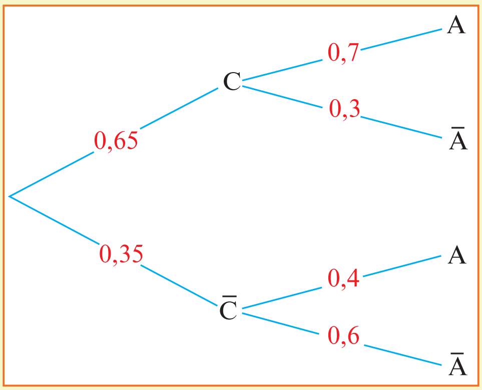
$$\boldsymbol{p_{\mathrm{C}}(\mathrm{A}) = \frac{70}{100} = 0,7}.$$

b. $p(\overline{\mathrm{C}}) = 1 - p(\mathrm{C}) = 0,35$ et $p_{\mathrm{C}}(\overline{\mathrm{A}}) = 1 - p_{\mathrm{C}}(\mathrm{A}) = 0,3$.

40 % des non-cadres parlent anglais, donc :

$$p_{\overline{\mathrm{C}}}(\mathrm{A}) = \frac{40}{100} = 0,4 \text{ et } p_{\overline{\mathrm{C}}}(\overline{\mathrm{A}}) = 1 - 0,4 = 0,6 .$$

On en déduit l'arbre pondéré :



c. On détermine $p(\mathrm{C} \cap \mathrm{A})$ en multipliant le long de la branche :

$$\boldsymbol{p(\mathrm{C} \cap \mathrm{A}) = p(\mathrm{C}) \times p_{\mathrm{C}}(\mathrm{A}) = 0,65 \times 0,7 = 0,455}.$$

0,7 est la probabilité de A sachant C, pas la probabilité de $\mathrm{A} \cap \mathrm{C}$.

d. On additionne les probabilités des branches qui conduisent à A :

$$\boldsymbol{p(\mathrm{A}) = p(\mathrm{A} \cap \mathrm{C}) + p(\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{C}}) = 0,455 + 0,35 \times 0,4 = 0,595}.$$

2 GROUPES ET RHÉSUS

Les choix des individus sont équiprobables.

a. $p_1 = p(\mathrm{R}^+) = p(\mathrm{O} \cap \mathrm{R}^+) + p(\mathrm{A} \cap \mathrm{R}^+) + p(\mathrm{B} \cap \mathrm{R}^+) + p(\mathrm{AB} \cap \mathrm{R}^+)$

$$= \frac{35}{100} + \frac{38,1}{100} + \frac{6,2}{100} + \frac{2,8}{100} = \frac{82,1}{100}$$

soit $\boldsymbol{p_1 = 0,821}$.

$p_2 = p(\mathrm{R}^-) = p(\overline{\mathrm{R}^+}) = 1 - p(\mathrm{R}^+)$, soit $\boldsymbol{p_2 = 0,179}$.

On aurait pu calculer p_2 directement par la méthode employée pour p_1.

b. $p_3 = p_{R^+}(O)$ est la probabilité que la personne interrogée soit du groupe O sachant qu'elle a le Rhésus + .

$p(R^+) = 0{,}821 \neq 0$, donc $p_3 = p_{R^+}(O) = \dfrac{p(O \cap R^+)}{p(R^+)} = \dfrac{0{,}35}{0{,}821}$,

soit $\boldsymbol{p_3 \approx 0{,}426}$ **à** $\boldsymbol{10^{-3}}$ **près.**

c. On cherche $p_O(R^+)$.

• Première méthode : avec la formule $p_O(R^+) = \dfrac{p(R^+ \cap O)}{p(O)}$.

$p(O) = p(R^+ \cap O) + p(R^- \cap O) = \dfrac{35}{100} + \dfrac{9}{100} = \dfrac{44}{100} = 0{,}44 \neq 0$, donc :

$$p_O(R^+) = \frac{p(R^+ \cap O)}{p(O)} = \frac{0{,}35}{0{,}44}, \text{ soit } \boldsymbol{p_O(R^+) \approx 0{,}795 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}}$$

• Deuxième méthode : on peut considérer qu'on interroge au hasard un des $\dfrac{35+9}{100} \times N = \dfrac{44}{100} \times N$ Français de groupe O : il y a $\dfrac{35}{100} \times N$ Français de rhésus positif parmi eux, donc $p_O(R^+) = \dfrac{\dfrac{35}{100}N}{\dfrac{44}{100} \times N} = \dfrac{35}{44}$,

soit $\boldsymbol{p_O(R^+) \approx 0{,}795}$ **à** $\boldsymbol{10^{-3}}$ **près.**

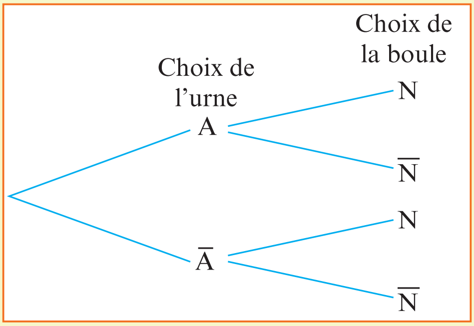
On doit passer par les effectifs pour utiliser la formule $\dfrac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$ de façon rigoureuse.

d. D'après **b.** et **c.**, $\boldsymbol{p_{R+}(O) \neq p(O)}$, **donc O et R⁺ ne sont pas indépendants.**

On pouvait aussi comparer $p(R^+)$ et $p_O(R^+)$, ou encore $p(O \cap R^+)$ et $p(O) \times p(R^+)$. Voir la méthode 2.

3 BLACK OR WHITE ?

a. Il y a deux éventualités pour le choix de l'urne, correspondant aux événements A, pour l'urne U_1, et $\overline{A}$ pour l'urne U_2. Il y a deux éventualités pour le choix de la boule, correspondant aux événements N pour une boule noire, et $\overline{N}$ pour une boule blanche. On en déduit l'arbre suivant :



b. Le choix de l'urne, parmi les deux urnes possibles, se fait de façon équiprobable, donc $\boldsymbol{p(\mathrm{A}) = \frac{1}{2}}$.

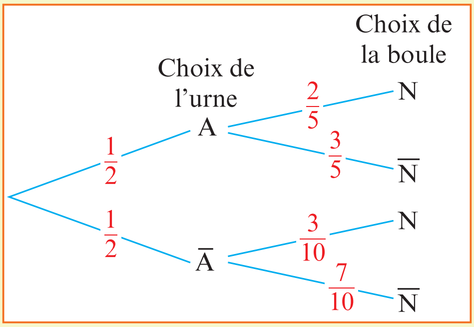
c. $p_{\mathrm{A}}(\mathrm{N})$ est la probabilité que la boule choisie soit noire sachant que l'urne choisie est l'urne U_1. Dans l'urne U_1, il y a 4 boules noires parmi les 10 boules présentes.
Les boules sont indiscernables au toucher, donc :

$$\boldsymbol{p_{\mathrm{A}}(\mathrm{N}) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}}.$$

$p_{\overline{\mathrm{A}}}(\mathrm{N})$ est la probabilité que la boule choisie soit noire sachant que l'urne choisie est l'urne U_2. Dans l'urne U_2, il y a 3 boules noires parmi les 10 boules présentes.
Les boules sont indiscernables au toucher, donc :

$$\boldsymbol{p_{\overline{\mathrm{A}}}(\mathrm{N}) = \frac{3}{10}}.$$

On peut alors compléter l'arbre pondéré :



La règle des nœuds a permis de déterminer $p(\overline{\mathrm{A}})$, $p_{\mathrm{A}}(\overline{\mathrm{N}})$ et $p_{\overline{\mathrm{A}}}(\overline{\mathrm{N}})$.

d. $p(\mathrm{A} \cap \mathrm{N})$ est la probabilité d'avoir choisi l'urne U_1, puis tiré une boule noire dans cette urne. Donc :

$$\boldsymbol{p(\mathrm{A} \cap \mathrm{N}) = p(\mathrm{A}) \times p_{\mathrm{A}}(\mathrm{N}) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{5}}.$$

$p(\overline{\mathrm{A}} \cap \mathrm{N})$ est la probabilité d'avoir choisi l'urne U_2, puis tiré une boule noire dans cette urne. Donc $p(\overline{\mathrm{A}} \cap \mathrm{N}) = p(\overline{\mathrm{A}}) \times p_{\overline{\mathrm{A}}}(\mathrm{N}) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{10} = \frac{3}{20}$.
D'où la probabilité que la boule tirée soit noire :

$$p(\mathrm{N}) = p(\mathrm{A} \cap \mathrm{N}) + p(\overline{\mathrm{A}} \cap \mathrm{N}) = \frac{1}{5} + \frac{3}{20}, \text{ soit } \boldsymbol{p(\mathrm{N}) = \frac{7}{20}}.$$

e. On cherche $p_{\mathrm{N}}(\mathrm{A})$.

$$p(\mathrm{N}) \neq 0, \text{ donc } p_{\mathrm{N}}(\mathrm{A}) = \frac{p(\mathrm{A} \cap \mathrm{N})}{p(\mathrm{N})} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{7}{20}} = \frac{1}{5} \times \frac{20}{7}, \text{ soit } \boldsymbol{p_{\mathrm{N}}(\mathrm{A}) = \frac{4}{7}}.$$

On trouve un résultat plus grand que $\frac{1}{2}$, ce qui est vraisemblable puisqu'on a une proportion plus importante de boules noires dans l'urne U_1.

CORRIGÉS

4 T'AS DE BEAUX YEUX…

1.

Sexe \ Yeux	Bleus	Non bleus	Total
Hommes	28 ❷	17	45
Femmes	22 ❶	33	55
Total	50	50	100

❶ $\dfrac{40}{100} \times 55 = 22$ femmes ont les yeux bleus, donc $55 - 22 = 33$ femmes n'ont pas les yeux bleus.

❷ $50 - 22 = 28$ hommes ont les yeux bleus, donc $45 - 28 = 17$ hommes n'ont pas les yeux bleus.

2. a. Le choix du professeur se fait au hasard donc les tirages sont équiprobables.

• La probabilité que la personne soit une femme est :

$$\boldsymbol{p(\mathrm{F}) = \frac{55}{100} = 0,55}.$$

• La probabilité que la personne soit une femme aux yeux bleus est :

$$\boldsymbol{p(\mathrm{F} \cap \mathrm{B}) = \frac{22}{100} = 0,22}.$$

• La probabilité que la personne soit un homme aux yeux bleus est :

$$\boldsymbol{p(\overline{\mathrm{F}} \cap \mathrm{B}) = \frac{28}{100} = 0,28}.$$

b. La probabilité que la personne ait les yeux bleus sachant que c'est un homme est $p_{\overline{\mathrm{F}}}(\mathrm{B})$. Comme $p(\overline{\mathrm{F}}) \neq 0$:

$$\boldsymbol{p_{\overline{\mathrm{F}}}(\mathrm{B}) = \frac{p(\overline{\mathrm{F}} \cap \mathrm{B})}{p(\overline{\mathrm{F}})} = \frac{0,28}{0,45} \approx 0,622}.$$

Autre méthode :
On interroge au hasard un des 45 hommes, donc :

$$p_{\overline{\mathrm{F}}}(\mathrm{B}) = \frac{28}{45} \approx 0,622.$$

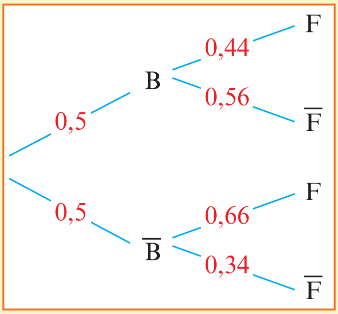
c. Sachant que la personne a les yeux bleus, la probabilité que ce soit une femme est $p_{\mathrm{B}}(\mathrm{F})$. Comme $p(\mathrm{B}) \neq 0$:

$$\boldsymbol{p_{\mathrm{B}}(\mathrm{F}) = \frac{p(\mathrm{F} \cap \mathrm{B})}{p(\mathrm{B})} = \frac{0,22}{0,50} = 0,44}.$$

Autre méthode :
On interroge au hasard l'une des 50 personnes aux yeux bleus, donc :

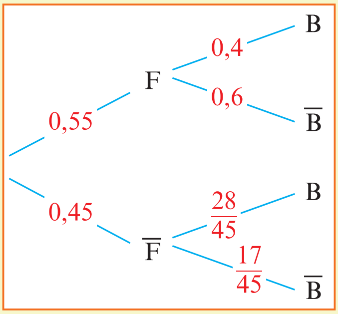
$$p_{\mathrm{B}}(\mathrm{F}) = \frac{22}{50} = \mathbf{0,44}.$$

3. • Si l'on commence par distinguer les professeurs suivant la couleur de leurs yeux, puis suivant leur sexe, on obtient l'arbre :



$p_{\overline{B}}(F)$ s'obtient comme au **2.c.**

• Si l'on commence par distinguer les professeurs suivant leur sexe, puis suivant la couleur de leurs yeux, on obtient l'arbre :



5 FIABILITÉ D'UN TEST

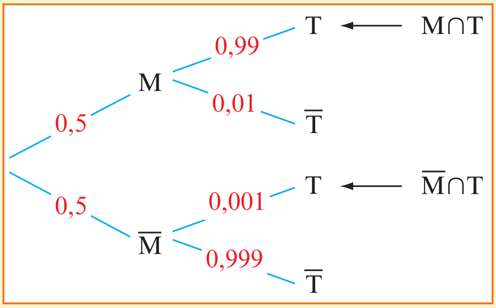
a. Le choix de l'animal est fait de façon équiprobable, donc :

$$p(\mathrm{M}) = \frac{50}{100} = 0,5 \;;\; p_{\mathrm{M}}(\mathrm{T}) = \frac{99}{100} = 0,99 \;;\; p_{\overline{\mathrm{M}}}(\mathrm{T}) = \frac{0,1}{100} = 0,001.$$

b. De la question **a.**, on déduit à l'aide de la règle des nœuds que :

$$p_{\mathrm{M}}(\overline{\mathrm{T}}) = 1 - p_{\mathrm{M}}(\mathrm{T}) = 0,01 \text{ et } p_{\overline{\mathrm{M}}}(\overline{\mathrm{T}}) = 1 - p_{\overline{\mathrm{M}}}(\mathrm{T}) = 0,999\,.$$

On peut alors dresser un arbre pondéré suivant :



Seules les branches amenant à T sont utiles pour cette question, mais il vaut mieux compléter l'arbre dans sa totalité. On ne sait jamais…

On en déduit :

$p(\mathrm{T}) = p(\mathrm{M} \cap \mathrm{T}) + p(\overline{\mathrm{M}} \cap \mathrm{T})$

$p(\mathrm{T}) = p(\mathrm{M}) \times p_{\mathrm{M}}(\mathrm{T}) + p(\overline{\mathrm{M}}) \times p_{\overline{\mathrm{M}}}(\mathrm{T}) = 0{,}5 \times 0{,}99 + 0{,}5 \times 0{,}001$

$\boldsymbol{p(\mathrm{T}) = 0{,}4\,955}$.

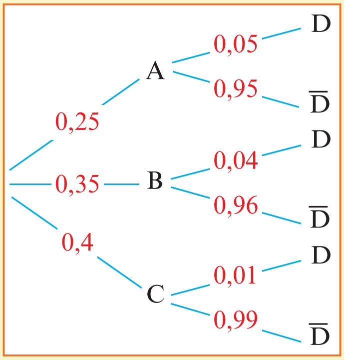
c. On cherche $p_{\mathrm{T}}(\mathrm{M})$. Comme $p(\mathrm{T}) \neq 0$:

$$p_{\mathrm{T}}(\mathrm{M}) = \frac{p(\mathrm{M} \cap \mathrm{T})}{p(\mathrm{T})} = \frac{p_{\mathrm{M}}(\mathrm{T}) \times p(\mathrm{M})}{p(\mathrm{T})} = \frac{0{,}99 \times 0{,}5}{0{,}4955} = 0{,}998\,991 \text{ (à } 10^{-6} \text{ près).}$$

$\boldsymbol{p_{\mathrm{T}}(\mathrm{M}) < 0{,}999}$**, donc le test n'est pas fiable**.

6 CALIBRAGE

a. Les pommes sont choisies au hasard donc les tirages sont équiprobables.
On en déduit l'arbre pondéré :



Les calculs n'ont pas été détaillés ici. En cas de difficultés, voir les méthodes à l'exercice 1 par exemple.

b. En multipliant les probabilités sur les branches débouchant sur D :

$p(\mathrm{D}) = p(\mathrm{A} \cap \mathrm{D}) + p(\mathrm{B} \cap \mathrm{D}) + p(\mathrm{C} \cap \mathrm{D})$

$p(\mathrm{D}) = p(\mathrm{A}) \times p_{\mathrm{A}}(\mathrm{D}) + p(\mathrm{B}) \times p_{\mathrm{B}}(\mathrm{D}) + p(\mathrm{C}) \times p_{\mathrm{C}}(\mathrm{D})$

$p(\mathrm{D}) = 0{,}25 \times 0{,}05 + 0{,}35 \times 0{,}04 + 0{,}4 \times 0{,}01$

$\boldsymbol{p(\mathrm{D}) = 0{,}0\,305}$.

c. La probabilité qu'une pomme vienne du producteur « a » sachant qu'elle est hors calibre est $p_{\mathrm{D}}(\mathrm{A})$.

Comme $p(\mathrm{D}) \neq 0$: $p_{\mathrm{D}}(\mathrm{A}) = \dfrac{p(\mathrm{A} \cap \mathrm{D})}{p(\mathrm{D})} = \dfrac{p(\mathrm{A}) \times p_{\mathrm{A}}(\mathrm{D})}{p(\mathrm{D})}$

$$\boldsymbol{p_{\mathrm{D}}(\mathrm{A}) = \frac{0{,}25 \times 0{,}05}{0{,}0305} = \frac{0{,}0125}{0{,}0305} \approx 0{,}4\,098 \text{ (à } 10^{-4} \text{ près).}}$$

d. La probabilité qu'une pomme vienne du producteur « c » sachant qu'elle n'est pas hors calibre est $p_{\overline{\mathrm{D}}}(\mathrm{C})$. Comme $p(\overline{\mathrm{D}}) \neq 0$:

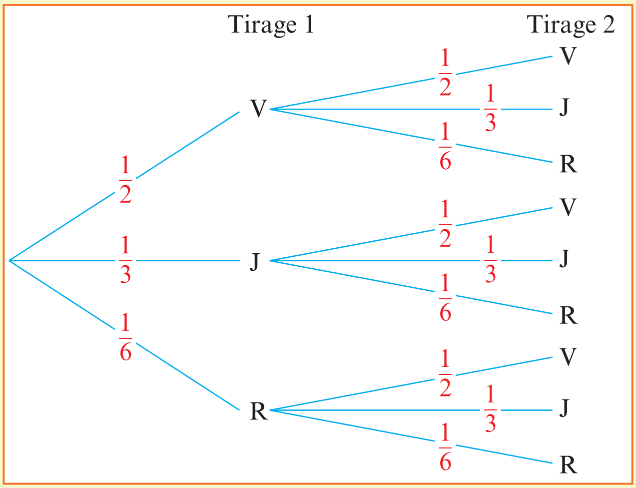
$$\boldsymbol{p_{\overline{\mathrm{D}}}(\mathrm{C}) = \frac{p(\mathrm{C} \cap \overline{\mathrm{D}})}{p(\overline{\mathrm{D}})} = \frac{p(\mathrm{C}) \times p_{\mathrm{C}}(\overline{\mathrm{D}})}{1 - p(\mathrm{D})} = \frac{0{,}4 \times 0{,}99}{0{,}9695} \approx 0{,}4\,085 \text{ (à } 10^{-4} \text{ près).}}$$

7 TIRAGES AVEC REMISE

L'expérience qui est répétée deux fois, de manière identique et indépendante, consiste à tirer une boule et à noter sa couleur.
Pour chaque tirage, les trois couleurs ne sont pas équiprobables !
Il faut numéroter les boules V_1, V_2, V_3, J_1, J_2, R_1 : ainsi les tirages de chacune de ces boules seront équiprobables.
Si l'on note V l'événement : « la boule tirée est verte », J l'événement : « la boule tirée est jaune » et R l'événement « la boule tirée est rouge » :

$$p(V) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2};\quad p(J) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \text{ et } p(R) = \frac{1}{6}.$$

On représente les deux tirages successifs par l'arbre pondéré suivant :



Les issues favorables à M sont $(V ; V)$, $(J ; J)$ et $(R ; R)$. Ainsi :

$$\boldsymbol{P(M) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{7}{18}}.$$

8 NAISSANCES INDÉPENDANTES

a. Si, pour n naissances successives, on note A l'événement : « il nait au moins une fille », son événement contraire est $\overline{A}$: « il nait n garçons ».
À chaque naissance, la probabilité qu'il naisse un garçon est de $1 - 0,49 = 0,51$.
Les naissances successives étant indépendantes, on a donc :

$$p(\overline{A}) = 0,51^n, \text{ soit } p(A) = 1 - p(\overline{A}) = 1 - 0,51^n.$$

Pour la répétition d'épreuves indépendantes : voir le paragraphe II du cours.

On cherche bien la plus petite valeur de l'entier $n > 0$ pour laquelle :

$$1 - 0,51^n > 0,95.$$

b. Cet algorithme de seuil s'arrête dès que la condition $1-0{,}51^n \leqslant 0{,}95$ n'est plus réalisée : on utilise une boucle non bornée While.

```
n=1
while 1-0.51**n<=0.95 :
    n=n+1
print(n)
```

Son exécution affiche $n = 5$: le nombre minimal de naissances est 5.

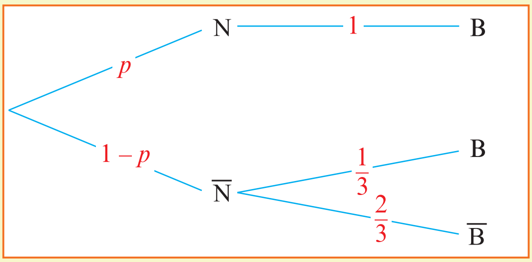
Attention à la syntaxe ** pour les exposants.

9 IL NEIGE

On note B l'événement :« M. Prudent met ses bottes » et N : « il neige ».

L'énoncé donne $p(\mathrm{B})=\dfrac{8}{10}$, $p_{\mathrm{N}}(\mathrm{B})=1$ et $p_{\overline{\mathrm{N}}}(\mathrm{B})=\dfrac{1}{3}$, donc $p_{\overline{\mathrm{N}}}(\overline{\mathrm{B}})=\dfrac{2}{3}$ d'après la règle des nœuds. Si $p=p(\mathrm{N})$, alors $p(\overline{\mathrm{N}})=1-p$.

On en déduit l'arbre pondéré suivant :



Ainsi $p(\mathrm{B})=p(\mathrm{N}\cap\mathrm{B})+p(\overline{\mathrm{N}}\cap\mathrm{B})$

$$= p(\mathrm{N})\times p_{\mathrm{N}}(\mathrm{B})+p(\overline{\mathrm{N}})\times p_{\overline{\mathrm{N}}}(\mathrm{B}) = p\times 1+(1-p)\times\frac{1}{3}.$$

Or $p(\mathrm{B})=\dfrac{8}{10}$, d'où :

$$p+(1-p)\times\frac{1}{3}=\frac{8}{10} \iff p+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\times p=\frac{8}{10}$$

$$\iff \frac{2}{3}\times p=\frac{8}{10}-\frac{1}{3}=\frac{24}{30}-\frac{10}{30}=\frac{14}{30}=\frac{7}{15}$$

$$\iff p=\frac{3}{2}\times\frac{7}{15}=\frac{7}{10}.$$

• On cherche $p_{\mathrm{B}}(\overline{\mathrm{N}})$.

Comme $p(\mathrm{B})=\dfrac{8}{10}\neq 0$, $p_{\mathrm{B}}(\overline{\mathrm{N}})=\dfrac{p(\mathrm{B}\cap\overline{\mathrm{N}})}{p(\mathrm{B})}=\dfrac{p(\overline{\mathrm{N}})\times p_{\overline{\mathrm{N}}}(\mathrm{B})}{p(\mathrm{B})}$

Or $p(\bar{N})=1-p=\dfrac{3}{10}$, donc $p_B(\bar{N})=\dfrac{\frac{3}{10}\times\frac{1}{3}}{\frac{8}{10}}=\dfrac{\frac{1}{10}}{\frac{8}{10}}=\dfrac{1}{10}\times\dfrac{10}{8}$.

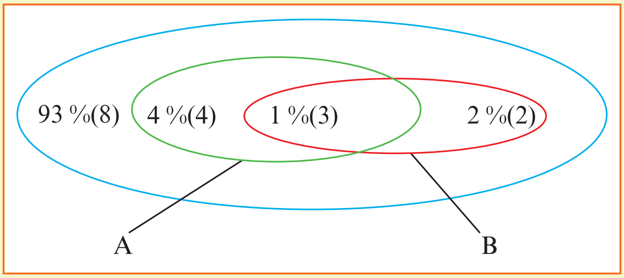
D'où : $\boldsymbol{p_{\mathrm{B}}(\overline{\mathrm{N}})=\dfrac{1}{8}}$.

10 CONTRÔLE DE QUALITÉ

1. Avec un tableau à double entrée (les chiffres entre parenthèses correspondent à l'ordre de remplissage des cases à la lecture de l'énoncé).

Fréquence en % correspondant aux événements	B	$\overline{B}$	Total
A	1 (3)	4 (1)	5 (4)
$\overline{A}$	2 (2)	93 (8)	95 (6)
Total	3 (5)	97 (7)	100

Ou avec un diagramme de Venn, plus visuel :



a. Le choix de l'appareil sorti de la machine M_1 se fait de façon équiprobable. Il y a $4\% + 1\% = 5\%$ de machines présentant le défaut d_1 (seul ou couplé avec le défaut d_2).

Donc $\boldsymbol{p(A) = \frac{5}{100} = 0,05}$.

De même, $\boldsymbol{p(B)} = \frac{2+1}{100} = \frac{3}{100} = 0,03$ et $p(A \cap B) = \frac{1}{100} = \mathbf{0,01}$.

Ainsi $p(A) \times p(B) = 0,05 \times 0,03 = 0,0015 \neq p(A \cap B)$.

Donc A et B ne sont pas indépendants.

b. $p(B) \neq 0$, donc $p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{0,01}{0,03}$, soit $\boldsymbol{p_B(A) = \frac{1}{3}}$.

c. $D = A \cup B$, donc le diagramme de Venn (ou le tableau à double entrée) donne directement : $p(D) = \frac{4+1+2}{100} = \frac{7}{100}$, donc $\boldsymbol{p(D) = 0,07}$.

On peut aussi utiliser la formule :
$p(D) = p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0,05 + 0,03 - 0,01 = 0,07$.

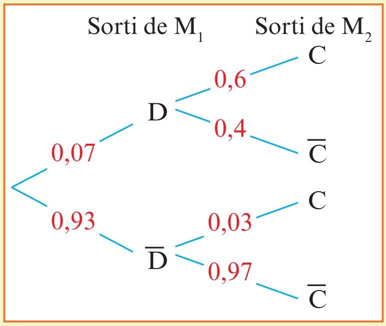
d. $\boldsymbol{p(\overline{D}) = 1 - p(D) = 0,93}$.

2. a. Les appareils sont tirés de façon équiprobable, donc $p_D(C) = \frac{60}{100} = 0,6$ et

$p_D(\overline{C}) = 1 - p_D(C) = 0,4$ (règle des nœuds) ;

$$p_{\overline{D}}(C) = \frac{3}{100} = 0,03 \text{ et } p_{\overline{D}}(\overline{C}) = 0,97.$$

D'où arbre pondéré :



En cas de difficultés, voir la méthode 1.

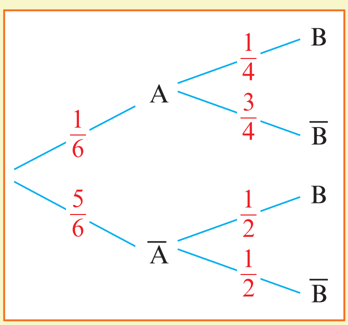
b. $p(\overline{\text{D}} \cap \overline{\text{C}}) = p(\overline{\text{D}}) \times p_{\overline{\text{D}}}(\overline{\text{C}}) = 0{,}93 \times 0{,}97$, soit $\boldsymbol{p(\overline{\text{D}} \cap \overline{\text{C}}) = 0{,}9\,021}$.

11 UN DÉ, DEUX URNES

a. On note A l'événement : « l'urne choisie est U » et B l'événement : « la boule choisie est blanche ». A est réalisé équivaut à : « le dé à donné 1 ».
Le dé est régulier, donc les résultats des lancers sont équiprobables, ainsi :

$$p(\text{A}) = \frac{1}{6} \text{ et } p(\overline{\text{A}}) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}.$$

Les boules sont indiscernables au toucher, donc les tirages dans chaque urne sont équiprobables. Alors $p_{\text{A}}(\text{B}) = \dfrac{1}{4}$, donc $p_{\text{A}}(\overline{\text{B}}) = 1 - p_{\text{A}}(\text{B}) = \dfrac{3}{4}$; $p_{\overline{\text{A}}}(\text{B}) = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$, donc $p_{\overline{\text{A}}}(\overline{\text{B}}) = \dfrac{1}{2}$. D'où l'arbre pondéré :



On en déduit $p(\text{B}) = p(\text{A} \cap \text{B}) + p(\overline{\text{A}} \cap \text{B}) = p(\text{A}) \times p_{\text{A}}(\text{B}) + p(\overline{\text{A}}) \times p_{\overline{\text{A}}}(\text{B})$

$$p(\text{B}) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{4} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{2} = \boldsymbol{\frac{11}{24}}.$$

Voir la méthode 1.

b. On cherche $p_{\text{B}}(\text{A}) = \dfrac{p(\text{A} \cap \text{B})}{p(\text{B})} = \dfrac{p(\text{A}) \times p_{\text{A}}(\text{B})}{p(\text{B})} = \dfrac{\frac{1}{6} \times \frac{1}{4}}{\frac{11}{24}}$

donc $\boldsymbol{p_{\text{B}}(\text{A}) = \dfrac{1}{11}}$.

12 SURPRISE !

On note P L'événement :« l'image est celle de Protector » ; D L'événement : « l'image est celle de Destructor » et A L'événement : « l'image est celle d'un autre héros ».

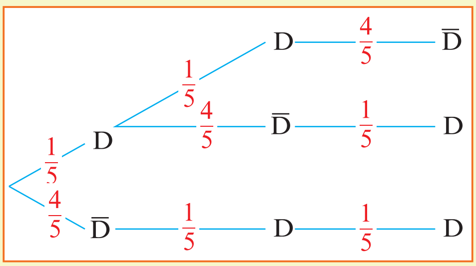
On a $p(\mathrm{P}) = \dfrac{1}{2}$ et $p(\mathrm{D}) = \dfrac{1}{5}$; or, $p(\mathrm{P}) + p(\mathrm{D}) + p(\mathrm{A}) = 1$.

Donc $p(\mathrm{A}) = 1 - p(\mathrm{P}) - p(\mathrm{D}) = 1 - \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{5} = \dfrac{3}{10}$.

a. On répète trois fois la même expérience de façon indépendante. Représentons un arbre pondéré, en nous limitant aux branches comptant deux fois l'issue D.

Attention : on ne représente pas toutes les branches pour gagner de la place, mais cela ne remet pas en cause la règle des nœuds !

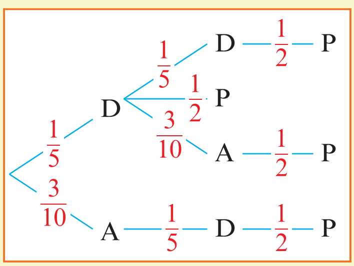
Avec les 3 chemins qui comportent deux fois l'issue D on obtient :



$$p(\mathrm{M}) = p(\mathrm{DD\overline{D}}) + p(\mathrm{D\overline{D}D}) + p(\mathrm{\overline{D}DD}) = \frac{1}{5}\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5} + \frac{1}{5}\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{5} + \frac{4}{5}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}$$

$$\boldsymbol{p(\mathrm{M}) = \frac{12}{125} = 0{,}096}.$$

b. De même, les branches donnant Destructor avant Protector sont :



$$P(\mathrm{N}) = \frac{1}{5}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{2} + \frac{1}{5}\times\frac{1}{2} + \frac{1}{5}\times\frac{3}{10}\times\frac{1}{2} + \frac{3}{10}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{2} = \mathbf{0{,}18}.$$

Toutes les branches qui commencent par DP son favorables à N et n'ont pas été représentées.
On a bien $p(\mathrm{DPP}) + p(\mathrm{DPD}) + p(\mathrm{DPA}) = \frac{1}{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2} + \frac{1}{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{5} + \frac{1}{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{10} = \frac{1}{5}\times\frac{1}{2}$.

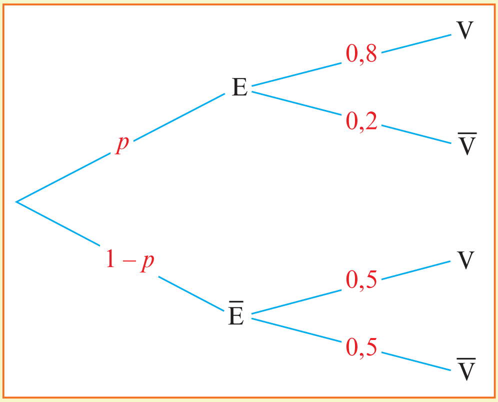
c. U correspond à l'événement $\mathrm{\overline{D}\,\overline{D}\,\overline{D}}$ avec $p(\overline{\mathrm{D}}) = \dfrac{4}{5}$ donc :

$$\boldsymbol{p(\mathrm{U}) = p(\overline{\mathrm{D}})^3 = \left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{64}{125} = 0{,}512}.$$

13 À BICYCLETTE

1. $\boldsymbol{p_E(V) = 0{,}8}$ et $\boldsymbol{p_{\overline{E}}(V) = 0{,}5}$.

2.



3. D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$p(V) = p(V \cap E) + p(V \cap \overline{E}) = p \times 0{,}8 + (1 - p) \times 0{,}5 = 0{,}3p + 0{,}5.$$

4. a. Sachant que $p(V) = 0{,}68$, la résolution de l'équation $0{,}3p + 0{,}5 = 0{,}68$ conduit facilement à $\boldsymbol{p = 0{,}6}$.

b. $p_V(E) = \dfrac{p(V \cap E)}{p(V)} = \dfrac{0{,}6 \times 0{,}8}{0{,}68} = \dfrac{48}{68} = \boldsymbol{\dfrac{12}{17}}$.

14 DÉ TRUQUÉ

1. Soit r la raison de la suite arithmétique.

$p_2 = p_1 + r,\ \ p_3 = p_1 + 2r,\ \ p_4 = p_1 + 3r,\ \ p_5 = p_1 + 4r$ et $p_6 = p_1 + 5r$.

Donc $r \neq 0$, sinon $p_1 = p_2 = \ldots = p_6$ ce qui est contraire à l'énoncé.

Or la somme des probabilités des événements élémentaires vaut 1, donc

$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1$. Donc $6p_1 + 15r = 1$. **(1)**

Soit q la raison de la suite géométrique.

$p_2 = q \times p_1$ et $p_4 = q \times p_2$; or $p_2 = p_1 + r$, donc :

$p_4 = q \times (p_1 + r) = q \times p_1 + q \times r = p_2 + q \times r$.

Or $p_4 = p_2 + 2r$, donc $q \times r = 2 \times r$, donc $q = 2$ car $r \neq 0$.

Ainsi $p_2 = 2p_1 = p_1 + r$, donc $p_1 = r$.

En remplaçant dans **(1)**, on trouve $21p_1 = 1$, donc $p_1 = \dfrac{1}{21} = r$.

Donc $p_2 = p_1 + r = \dfrac{2}{21}$, $\quad p_3 = p_2 + r = \dfrac{3}{21}$, $\quad p_4 = p_3 + r = \dfrac{4}{21}$,

$p_5 = p_4 + r = \dfrac{5}{21}$ et $p_6 = p_5 + r = \dfrac{6}{21}$.

Ainsi $\boldsymbol{p_k = \dfrac{k}{21}}$ **pour tout entier** $\boldsymbol{k}$ **compris entre 1 et 6**.

Si on bloque sur ce genre de question, on peut la passer dans un premier temps et traiter la suite en utilisant le résultat donné dans l'énoncé.

2. a. Notons $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$ l'univers de cette expérience aléatoire.

$A = \{2;4;6\}$, donc $\boldsymbol{p(A)} = p_2 + p_4 + p_6 = \frac{2}{21} + \frac{4}{21} + \frac{6}{21} = \frac{12}{21} = \boldsymbol{\frac{4}{7}}$.

$B = \{3;4;5;6\}$, donc $p(B) = p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = \frac{3}{21} + \frac{4}{21} + \frac{5}{21} + \frac{6}{21} = \frac{18}{21}$,

soit $\boldsymbol{p(B) = \frac{6}{7}}$.

$C = \{3;4\}$, donc $p(C) = p_3 + p_4 = \frac{3}{21} + \frac{4}{21} = \frac{7}{21}$, soit $\boldsymbol{p(C) = \frac{1}{3}}$.

b. $p(A) \neq 0$, donc $p_A(B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)}$.

$A \cap B = \{4;6\}$, donc $p(A \cap B) = p_4 + p_6 = \frac{4}{21} + \frac{6}{21} = \frac{10}{21}$.

Donc $p_A(B) = \dfrac{\frac{10}{21}}{\frac{4}{7}} = \frac{10}{21} \times \frac{7}{4}$, soit $\boldsymbol{p_A(B) = \frac{5}{6}}$.

c. $\boldsymbol{p_A(B) \neq p(B)}$**, donc A et B ne sont pas indépendants.**

$A \cap C = \{4\}$, donc $p(A \cap C) = p_4 = \frac{4}{21}$.

$p(A) \times p(C) = \frac{4}{7} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{21} = p(A \cap C)$.

Donc A et C sont indépendants.

d. Si le dé est bien équilibré, $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = p_6 = \frac{1}{6}$, donc

$p(A) = p_2 + p_4 + p_6 = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$, $p(B) = p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

et donc $p(A) \times p(B) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

$p(A \cap B) = p_4 + p_6 = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$.

Ainsi $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$: **A et B sont indépendants.**

Ici, le dé étant bien équilibré, les probabilités correspondent aux proportions de cas favorables : la proportion des nombres pairs parmi les nombres supérieurs ou égaux à 3 $\left(2 \text{ pairs pour } 4 : \text{proportion } \frac{2}{4} = \frac{1}{2}\right)$ est bien la même que la proportion de nombres pairs dans les résultats possibles du dé $\left(3 \text{ pairs pour } 6 \text{ nombres} : \text{proportion } \frac{3}{6} = \frac{1}{2}\right)$.

$p(C) = p_3 + p_4 = 2 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$ et $p(A \cap C) = p_4 = \frac{1}{6}$,

$p(A) \times p(C) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6} = p(A \cap C)$: **A et C sont indépendants.**

15 JOLIE POUPÉE

a. À chaque lancer, on note C l'événement :« la fléchette crève le ballon » :
$p(\mathrm{C}) = \dfrac{7}{10}$ et $p(\overline{\mathrm{C}}) = 1 - p(\mathrm{C}) = \dfrac{3}{10}$.
Avec 3 euros, il a $2 \times 3 = 6$ fléchettes à lancer.
Ces 3 euros ne suffisent pas si l'événement réalisé est $\overline{\mathrm{C}}_1\overline{\mathrm{C}}_2\overline{\mathrm{C}}_3\overline{\mathrm{C}}_4\overline{\mathrm{C}}_5\overline{\mathrm{C}}_6$, où on a numéroté les lancers, de probabilité $\boldsymbol{p(\overline{\mathrm{C}})^6 = \left(\dfrac{3}{10}\right)^6 = 7{,}29 \times 10^{-4}}$.

Ici, on s'est contenté de considérer la dernière branche d'un arbre pondéré à $2^6 = 64$ branches représentant les 6 lancers successifs indépendants.

b. Pour $n = 4$, il lance $2 \times 4 = 8$ fléchettes.
L'événement cherché est $\overline{\mathrm{C}}_1\overline{\mathrm{C}}_2\overline{\mathrm{C}}_3\overline{\mathrm{C}}_4\overline{\mathrm{C}}_5\overline{\mathrm{C}}_6\overline{\mathrm{C}}_7\mathrm{C}_8$, de probabilité :

$$p(\overline{\mathrm{C}})^7 \times p(\mathrm{C}) = \left(\frac{3}{10}\right)^7 \times \frac{7}{10} = \frac{3^7 \times 7}{10^8} = 1{,}5\,309 \times 10^{-4}.$$

La probabilité qu'il crève un ballon à la dernière fléchette est $1{,}53 \times 10^{-4}$.
c. Soit A l'événement : « Guillaume part sans la poupée ».
A est réalisé si aucune des $2n$ fléchettes lancées ne crève de ballon, donc :

$$p(\mathrm{A}) = p(\overline{\mathrm{C}}_1\overline{\mathrm{C}}_2\overline{\mathrm{C}}_3\ldots\overline{\mathrm{C}_{2n-1}}\,\overline{\mathrm{C}_{2n}}) = p(\overline{\mathrm{C}})^{2n} = \left(\frac{3}{10}\right)^{2n} = 0{,}09^n.$$

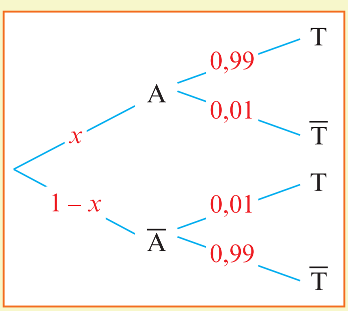
Ainsi : $p(\mathrm{A}) \leqslant \dfrac{1}{10^6} \Leftrightarrow 0{,}09^n \leqslant 10^{-6}$.
Le script suivant renvoie la première valeur de l'entier n non nul pour lequel $0{,}09^n \leqslant 10^{-6}$:

```
n=1
while 0.09**n>10**-6 :
    n=n+1
print(n)
```

Son exécution retourne : 6.
On en déduit que **la somme minimale à payer est de 6 euros**.

16 DÉPISTAGE SYSTÉMATIQUE

1. L'individu testé ayant été choisi au hasard, ce test se fait de façon équiprobable parmi tous les individus de cette population.
La fraction d'individus atteints de cette population étant x, $p(\mathrm{A}) = x$.
On a également $p_{\mathrm{A}}(\mathrm{T}) = 0{,}99$ et $p_{\overline{\mathrm{A}}}(\overline{\mathrm{T}}) = 0{,}99$, d'où l'arbre pondéré complété avec la règle des nœuds.



2. $p(\mathrm{T}) = p(\mathrm{A}) \times p_{\mathrm{A}}(\mathrm{T}) + p(\overline{\mathrm{A}}) \times p_{\overline{\mathrm{A}}}(\mathrm{T})$

$p(\mathrm{T}) = x \times 0{,}99 + (1 - x) \times 0{,}01$

$\boldsymbol{p(\mathrm{T}) = 0{,}98x + 0{,}01}$.

Voir la méthode 2.

3. a. $p(\mathrm{T}) = 0{,}98x + 0{,}01 \neq 0$ donc :

$$p_{\mathrm{T}}(\mathrm{A}) = \frac{p(\mathrm{A} \cap \mathrm{T})}{p(\mathrm{T})} = \frac{p(\mathrm{A}) \times p_{\mathrm{A}}(\mathrm{T})}{p(\mathrm{T})}$$

$$p_{\mathrm{T}}(\mathrm{A}) = \frac{x \times 0{,}99}{0{,}98x + 0{,}01} = \frac{0{,}99x \times 100}{(0{,}98x + 0{,}01) \times 100}$$

soit $p_{\mathrm{T}}(\mathrm{A}) = \dfrac{99x}{98x + 1} = f(x)$.

b. Pour trouver les variations de f, on étudie le signe de f'.

f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ -\dfrac{1}{98} \right\}$, donc sur $[0\,;1]$.

$$f'(x) = \frac{99(98x + 1) - 99x \times 98}{(98x + 1)^2} = \frac{99}{(98x + 1)^2}.$$

Donc $f' > 0$ sur $[0\,;1]$ et **f est strictement croissante sur $[0\,;1]$**.

c.

x	0,001	0,01	0,1	0,5	0,9
$p_{\mathrm{T}}(\mathrm{A})$	0,090 2	0,5	0,916 7	0,99	0,998 9

On utilise la calculatrice avec la fonction $Y = (99X)/(98X + 1)$: ne pas oublier les parenthèses !

d. S'il s'agit d'une maladie rare, la proportion x d'individus atteints est proche de zéro, donc la probabilité que la personne testée soit atteinte sachant que le test est positif est faible : **on risque donc d'alerter inutilement des individus sains**.

e. Si la population présente des symptômes de la maladie, la proportion x d'individus atteints parmi cette population se rapproche de 1. Il s'ensuit que la probabilité d'être malade sachant que le test est positif devient très proche de 1, donc que **le test devient davantage prédictif**.

4. a. $p(\overline{\mathrm{T}}) = 1 - p(\mathrm{T}) = 1 - (0{,}98x + 0{,}01) = 0{,}99 - 0{,}98x \neq 0$ car $x \in [0\,;1]$.

Donc $p_{\overline{\mathrm{T}}}(\overline{\mathrm{A}}) = \dfrac{p(\overline{\mathrm{A}} \cap \overline{\mathrm{T}})}{p(\overline{\mathrm{T}})} = \dfrac{p(\overline{\mathrm{A}}) \times p_{\overline{\mathrm{A}}}(\overline{\mathrm{T}})}{p(\overline{\mathrm{T}})}$

$$p_{\overline{\mathrm{T}}}(\overline{\mathrm{A}}) = \frac{(1 - x) \times 0{,}99}{0{,}99 - 0{,}98x} = \frac{(1 - x) \times 99}{99 - 98x} = \frac{99 \times (1 - x)}{98(1 - x) + 1}$$

$\boldsymbol{p_{\overline{\mathrm{T}}}(\overline{\mathrm{A}}) = f(1 - x)}$.

Sans autre information dans l'énoncé, on utilise la formule du paragraphe 2 du cours.

b. Soit a, b deux réels dans $[0\,;1]$ tels que $a < b$.
Alors $0 \leqslant a < b \leqslant 1$.
Donc $0 \geqslant -a > -b \geqslant -1$, donc $1 \geqslant 1-a > 1-b \geqslant 0$.
Or f est strictement croissante sur $[0\,;1]$ d'après **3. b.**
Donc $f(1-a) > f(1-b)$.
Donc $x \mapsto f(1-x)$ est strictement décroissante sur $[0\,;1]$.

Autre méthode : on dérive $g(x) = f(1-x)$ à l'aide de la dérivée d'une composée. On obtient $g'(x) = -1 \times f'(1-x) < 0$ sur $[0\,;1]$ car $f' > 0$ sur $\mathbb{R}$ d'après les calculs effectués en **2.b.**

c. Si $x < 0{,}1$, $0 \leqslant x < 0{,}1$, donc $f(1-x) > f(0{,}9)$,
soit $f(1-x) > 0{,}998$, c'est-à-dire : $\boldsymbol{p_{\overline{T}}(\overline{A}) > 0{,}998}$.

d. Dans le cas d'une maladie rare, x est proche de zéro, donc certainement inférieur à 0,1. La probabilité que l'individu ne soit pas atteint sachant que le test est négatif est très proche de 1 : **cela doit pouvoir le rassurer**.

9 Variables aléatoires

Soit Ω un ensemble fini muni d'une loi de probabilité p.

I LOI DE PROBABILITÉ

- Une **variable aléatoire** est une fonction X définie sur Ω, à valeurs réelles x_1, $x_2, \ldots, x_r$.

Pour i allant de 1 à r, l'événement « X prend la valeur x_i » s'écrit $(X = x_i)$ et on note $p_i = p(X = x_i)$.

- La **loi de probabilité de X** peut s'écrire dans un tableau :

Valeurs possibles x_i	x_1	x_2	$\ldots$	x_r
Probabilités correspondantes $p(X = x_i)$	p_1	p_2	$\ldots$	p_r

On doit avoir $p_1 + p_2 + \ldots + p_r = 1$.

II ESPÉRANCE, VARIANCE, ÉCART-TYPE

- L'**espérance** de la variable aléatoire X est le nombre :

$$\boxed{E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_r p_r}$$

PROPRIÉTÉ (LINÉARITÉ DE L'ESPÉRANCE) :

Soit X est une variable aléatoire, a et b deux nombres réels,

$$\boxed{E(aX + b) = aE(X) + b}$$

- Sa **variance** est le nombre $V(X)$ (ou V en abrégé) défini par :

$$\boxed{V(X) = (x_1 - E(X))^2 \times p_1 + (x_2 - E(X))^2 \times p_2 + \ldots + (x_r - E(X))^2 \times p_r}$$

- Son **écart-type** est le nombre $\sigma(X)$ (ou σ en abrégé) défini par :

$$\boxed{\sigma(X) = \sqrt{V(X)}}$$

- On a toujours $V \geqslant 0$, donc on peut bien calculer sa racine carrée, c'est-à-dire σ. De plus, on a toujours $\sigma \geqslant 0$.
- $\sigma^2 = V$, c'est pourquoi V est souvent noté σ^2.

MÉTHODE 1

Déterminer la loi de probabilités d'une variable aléatoire X

➜ Voir les exos 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 et 16.

Étape 1. On identifie les différentes valeurs x_1, x_2, …, x_r pouvant être prises par la variable aléatoire X.
Étape 2. Pour tout i allant de 1 à r, on calcule $p_i = p(X = x_i)$.
Étape 3. On dresse éventuellement un tableau qui résume la loi de X et on vérifie que $p_1 + p_2 + \ldots + p_r = 1$.

On peut également utiliser cette égalité, lorsqu'on a trouvé toutes les valeurs des p_i sauf une, pour déterminer cette dernière valeur.

Exo résolu

Une urne contient dix boules indiscernables au toucher, l'une d'entre elles porte le numéro 10, deux portent le numéro 5, trois portent le numéro 2 et les autres portent le numéro 1.
L'expérience consiste à extraire au hasard une boule de l'urne et à noter son numéro X.
Déterminer la loi de probabilité de X.

CORRIGÉ

Étape 1. Les quatre valeurs possibles pour X sont $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 5$ et $x_4 = 10$.
Étape 2. Les 10 boules ont toutes la même probabilité de sortie.

Dans cette situation d'équiprobabilité, on utilise la formule :
$$\frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}.$$

Une boule porte le numéro 10, donc $p(X = 10) = \frac{1}{10}$.

De même $p(X = 5) = \frac{2}{10}$ et $p(X = 2) = \frac{3}{10}$.

Il reste quatre boules portant le numéro 1, donc $p(X = 1) = \frac{4}{10}$.

Étape 3. On dresse le tableau résumant la loi de X :

x_i	1	2	5	10
$p(X = x_i)$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$

Vérification (conseillée) : on a bien $\frac{4}{10} + \frac{3}{10} + \frac{2}{10} + \frac{1}{10} = \frac{10}{10} = 1$.

MÉTHODE 2

Déterminer à la calculatrice l'espérance, la variance et l'écart-type d'une variable aléatoire *X*

➜ Voir les exos 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 15 et 16.

Étape 1. On résume la loi de probabilité de la variable aléatoire X comme dans la méthode 1.

Étape 2. Dans le menu statistique de la calculatrice, on saisit les valeurs x_i dans la première colonne et les valeurs p_i dans la deuxième.

Étape 3. On effectue les calculs comme s'il s'agissait d'un tableau statistique avec fréquences.

L'espérance $E(X)$ est donnée par la moyenne de la série, son écart-type $\sigma(X)$ est donné par l'écart-type σ de la série, et sa variance $V(X)$ se calcule avec la formule $V = \sigma^2$.

Exo résolu

Une urne contient dix boules indiscernables au toucher, l'une d'entre elles porte le numéro 10, deux portent le numéro 5, trois portent le numéro 2 et les autres portent le numéro 1.

L'expérience consiste à extraire au hasard une boule de l'urne et à noter son numéro X.

Déterminer à l'aide de la calculatrice l'espérance, la variance et l'écart-type de la variable aléatoire X.

CORRIGÉ

Étape 1. Voir la méthode 1.

x_i	1	2	5	10
$p(X = x_i)$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$

Étape 2.

Avec une calculatrice scientifique Texas Instrument

Dans le menu STATS, onglet EDIT, 1 : Modifier

On inscrit les valeurs 1, 2, 5, 10 dans la colonne L_1.

On inscrit les valeurs $\frac{4}{10}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{2}{10}$, $\frac{1}{10}$ dans la colonne L_2.

Dans le menu stats, onglet CALC, on choisit Stats 1 Var.

On remplit les lignes : Xliste : L_1 et ListeFréq : L_2.

Étape 3. On appuie sur Calculer.

On lit : $\bar{x} = 3$ pour $E(X)$ et $\sigma_x \approx 2{,}76$ pour σ, donc $V(X) \approx 7{,}62$.

Attention à la syntaxe : L_1 s'obtient par 2nd+1 : ce n'est pas la lettre L suivie du chiffre 1.

Étape 2.

Avec une calculatrice scientifique Casio

Dans le menu Statistiques :

On inscrit les valeurs 1, 2, 5, 10 dans la colonne List 1.

On inscrit les valeurs $\frac{4}{10}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{2}{10}$, $\frac{1}{10}$ dans la colonne Lis t 2.

On appuie sur F2 (Calc) puis sur F6 (SET) pour vérifier les réglages : 1 Var XList : List 1 et 1 Var Freq : List 2.

Étape 3. On revient sur CALC et on choisit F1 (1-VAR).

On lit : $\overline{x}=3$ pour $E(X)$ et $x\sigma n$ ou $\sigma x \approx 2{,}76$ pour σ, donc $V(X) \approx 7{,}62$.

Attention à la syntaxe : pour rentrer le numéro de la liste dans le menu SET, utiliser la touche F1 puis le numéro de la liste. Ne pas taper LIST.

MÉTHODE 3

Déterminer à la main l'espérance, la variance et l'écart-type d'une variable aléatoire *X*

Étape 1. On utilise la formule de l'espérance :

$$E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_r p_r .$$

Étape 2. On complète un tableau de valeurs du type :

x_i	x_1	x_2	$\ldots$	x_r
$(x_i - E(X))$				
$(x_i - E(X))^2$				

Étape 3. On utilise la formule de la variance :

$$V(X) = (x_1 - E(X))^2 \times p_1 + (x_2 - E(X))^2 \times p_2 + \ldots + (x_r - E(X))^2 \times p_r$$

puis celle de l'écart-type : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Exo résolu

On utilise les mêmes valeurs que dans la méthode 2.

Étape 1.

$$E(X) = 1 \times \frac{4}{10} + 2 \times \frac{3}{10} + 5 \times \frac{2}{10} + 10 \times \frac{1}{10} = 3\,.$$

Étape 2.

x_i	1	2	5	10
$(x_i - E(X))$	–2	–1	2	7
$(x_i - E(X))^2$	4	1	4	49
$p(X = x_i)$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$

Étape 3.

$$V(X) = 4 \times \frac{4}{10} + 1 \times \frac{3}{10} + 4 \times \frac{2}{10} + 49 \times \frac{1}{10} = 7{,}6.$$

On en déduit l'écart-type :

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{7{,}6} \approx 2{,}76$ à 0,01 près.

Pour un calcul à l'aide d'un script en Python : voir l'exercice 1.

TESTER SES CONNAISSANCES

1 À LA CALCULATRICE, À LA MAIN, AVEC PYTHON

★ | 15 min | ▸ P. 272

a. Calculer espérance, variance et écart-type de la variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée dans le tableau suivant.
Les résultats seront approchés à 10^{-2} près.

x_i	-10	-5	0	15
$P(X = x_i)$	$0,1$	$0,3$	$0,4$	$0,2$

Voir la méthode 2.

b. Dans le script suivant, les listes x et p comportent les valeurs x_i de la variable aléatoire X et les valeurs $p(X = x_i)$.
Compléter le script pour qu'il calcule la liste L des valeurs $x_i \times p(X = x_i)$, la liste M des valeurs $\left(x_i - E(X)\right)^2$, la variance V de X et qu'il renvoie espérance, variance et écart-type de X arrondies à 10^{-2} près.
Vérifier les résultats précédents.

```
from math import sqrt
x=[-10,-5,0,15]
p=[0.1,0.3,0.4,0.2]
L=[... for i in range(4)]
E=sum(L)
M=[... ]
V=...
print('E(X)=',round(E,2))
print('V(X)=',...)
print('sigma(X)=',...)
```

Pour multiplier les éléments de rang i de deux listes L1 et L2 on utilise la syntaxe L1[*i*]*L2[*i*]. Rappel : le premier élément d'une liste a pour rang 0.

2 DEUX INCONNUES

★ | 5 min | ▸ P. 272

X est une variable aléatoire dont la loi est donnée par le tableau suivant :

x_i	-6	x	3
$P(X = x_i)$	$0{,}3$	$0{,}6$	y

Déterminer x et y pour que l'espérance $E(X)$ soit égale à 0 (jeu équitable).

Que vaut la somme des probabilités de toutes les issues possibles pour X ?

3 GAIN ALGÉBRIQUE

★★ | 30 min | ▸ P. 272

Pour une tombola, 1 000 billets sont mis en vente au prix de 2 euros. Il y a 10 billets gagnants. L'un rapporte 500 euros, 2 rapportent 100 euros, et 7 rapportent 50 euros. On achète un billet au hasard. On note G le gain algébrique correspondant à ce billet.

1. Justifier que G peut prendre les valeurs -2, 48, 98 et 498.

2. Déterminer la loi de probabilité de G.

Voir la méthode 1.

3. Déterminer l'espérance $E(G)$ du gain, puis son écart-type σ à l'aide de la calculatrice. Arrondir à 10^{-2} près.

Voir la méthode 2.

4. Complément avec python

La fonction gain simule le gain à l'issue de la tombola en considérant que le billet numéro 1 rapporte 500 euros, les billets 2 et 3 rapportent 100 euros, les billets numéro 4 à 10 rapportent 50 euros et les autres rien.

```
from random import randint
def gain():
    b=randint(1,1000)
    if b==1:
        g=498
    elif 2<=b<=3:
        g=98
    elif ...
        g=48
    else:
    ...
    return g
```

a. Compléter les lignes 8 et 11.

b. On veut observer l'écart entre la moyenne des gains observée sur 10 000 billets de loterie simulés dans les mêmes conditions et l'espérance trouvée au **3**.
Le script suivant réalise 200 échantillons de 10 000 billets et calcule pour chacun le gain moyen réalisé sur ces 10 000 billets.
Compléter ce script pour qu'il affiche, sur ces $n = 200$ échantillons, le pourcentage d'échantillons dont le gain moyen est dans l'intervalle :

$$\left[E(G)-\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}\ ;\ E(G)-\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}\right].$$

Saisir le script complet et observer sur plusieurs simulation le pourcentage trouvé. Que remarque-t-on ?

```
13  from math import sqrt
14  E=-0.95
15  s=16.92
16  A=0
17  for i in range(200):
18  L=[...]
```

```
19      m=...
20      if ...<=m<=...:
21          A=...
22      print("pourcentage
        d'échantillons :",..., "%")
```

4 L'ADDITION ! ★ | 10 min | ▸ P. 273

Lorsqu'un client rentre dans le restaurant « Ki Manj Pay », la probabilité qu'il choisisse l'un des quatre menus proposés est donnée par :

Prix du menu (en euros)	8	15	22	30
Probabilité	0,2	0,4	0,3	0,1

a. Si 500 clients mangent dans ce restaurant au cours du mois, quel chiffre d'affaire mensuel le restaurateur peut-il espérer ?

> Introduire la variable aléatoire X représentant le prix payé par le client : le restaurateur peut espérer qu'en moyenne le client dépense $E(X)$ euros.

b. Les tarifs changent au premier septembre. Le restaurateur hésite entre deux modifications :
Modification A : il augmente tous les prix de 10 %.
Modification B : il augmente tous les prix d'un euro.
Si les modifications n'influencent ni le nombre de clients ni la répartition de leurs choix, quelle modification choisira le restaurateur s'il espère gagner le plus possible ?

> Penser à utiliser la linéarité de l'espérance sachant qu'une augmentation de 10 % correspond à une multiplication par $1+\dfrac{10}{100}$.

5 NAISSANCES ★★ 10 min ▶ P. 273

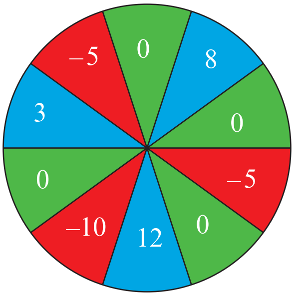
Une étude statistique sur une population de hérissons montre qu'à la naissance, 4 petits sur 10 sont des femelles. On suppose que les naissances des petits d'une même portée sont indépendantes. Pour une portée de 3 bébés hérissons, déterminer la loi de probabilité du nombre X de femelles.

On pourra construire un arbre pondéré représentant les 3 naissances successives.

6 VRAI OU FAUX ? ★★ 10 min ▶ P. 274

On suppose que la roue n'est pas truquée et que tous les secteurs ont des angles au centre de même mesure.
Lorsqu'un joueur fait tourner cette roue :

a. La probabilité qu'il soit gagnant est 0,3.
b. La probabilité qu'il soit perdant est 0,3.
c. Le jeu est équitable.



Commencer par établir la loi de probabilité du gain X.
Le jeu est équitable lorsque l'espérance de gain est nulle.

S'ENTRAÎNER

7 DÉS ICOSAÉDRIQUES ★★ 10 min ▶ P. 275

Deux dés à 20 faces (cela existe : ils sont icosaédriques) bien équilibrés ont 10 faces numérotées 1 ainsi que 5 faces numérotées 2 et 5 faces numérotées 3.
On lance ces deux dés et on note S la somme des résultats obtenus.
Déterminer la loi de probabilité de S.

Pour bien les distinguer, on pourra imaginer que les dés sont de couleurs différentes. En cas de difficultés, voir le chapitre 8.

8 SECOND DEGRÉ

★★ | 20 min | ▸ P. 276

Une urne contient 4 boules numérotées de 1 à 4, indiscernables au toucher.
On tire une boule, on note son numéro b et on la remet dans l'urne.
On tire une deuxième boule et on note son numéro c.
On note S le nombre de solutions réelles de l'équation $x^2 + bx + c = 0$.

a. Quelle loi de probabilité peut-on associer à l'ensemble des couples $(b\,;c)$?

b. À l'aide d'un tableau à double entrée, déterminer la loi de probabilité de S, puis son espérance.

> Cet exercice se fait après l'étude des équations du second degré du chapitre 3.

9 TIRAGES SANS REMISE

★★ | 15 min | ▸ P. 277

Une urne contient 5 boules indiscernables au toucher : 2 boules vertes numérotées 1 et 3 ; 3 boules jaunes numérotées 1, 2 et 3.
Un joueur donne n euros $(n \in \mathbb{N}^*)$ à l'organisateur, puis tire successivement et sans remise, deux boules de l'urne (il ne remet pas la première boule tirée dans l'urne avant de tirer la seconde).
Si elles ont la même couleur, le joueur ne gagne rien (et a perdu sa mise).
Si elles sont de couleurs différentes, il gagne le montant obtenu en effectuant le produit des numéros des deux boules.
Quelle est la mise entière maximale qui permet au jeu d'être favorable au joueur ?

> Construire un arbre non pondéré qui donne tous les résultats possibles, puis déterminer l'espérance du gain en fonction de *n*.

10 AU CHOIX

★★ | 30 min | ▸ P. 278

Un Questionnaire à Choix Multiples comporte quatre questions. Pour chaque question, une seule des trois propositions est exacte.
Un élève décide d'y répondre au hasard.
X désigne le nombre de bonnes réponses qu'il obtient.

1. X suit-elle une loi équirépartie sur $\{0\,;1\,;2\,;3\,;4\}$? Justifier.

2. À l'aide d'un arbre pondéré, déterminer la loi de probabilité de X, et $E(X)$.

> Pour la construction et l'utilisation de l'arbre : voir le chapitre 8.

3. Une bonne réponse apporte 3 points, une mauvaise enlève 1 point.
On note Y la note obtenue pour ce QCM.
Déterminer la note que l'élève peut espérer obtenir :

a. Première méthode : après avoir déterminé la loi de probabilité de Y.

b. Deuxième méthode : après avoir justifié que $Y = 4X - 4$.

PRÉPARER UN CONTRÔLE

11 LANCER DE DÉ

★ | 15 min | ▸ P. 279

Un jeu consiste à lancer un dé normal. Le joueur empoche une somme équivalente au nombre apparu si ce nombre est un multiple de 3 et paye le montant indiqué à la banque dans le cas contraire.

a. Donner la loi de probabilité associée au gain (positif ou négatif) pour une partie.

b. Calculer l'espérance et la variance de la loi déterminée ci-dessus (vous pouvez donner les résultats sans justification). Le jeu est-il équitable ?

> Un jeu est équitable si l'espérance du gain est nulle.

12 DES PANNES

★★ | 10 min | ▸ P. 280

Les coûts de fabrication d'un téléviseur s'élèvent à 200 euros.

Un mauvais réglage sur une machine qui les fabrique amène deux types de défauts, notés a et b. Un téléviseur peut même parfois souffrir des deux défauts en même temps.

10 % des téléviseurs produits souffrent (au moins) du défaut a ;

7 % des téléviseurs produits souffrent (au moins) du défaut b.

On sait aussi que 2 % des téléviseurs souffrent des deux défauts.

Avant d'être vendus au client 500 euros, les téléviseurs sont testés et ceux qui présentent des défauts subissent des interventions :

- qui coûtent 50 euros pour corriger le défaut a ;
- qui coûtent 100 euros pour corriger le défaut b.

Un téléviseur est pris au hasard en réserve.

Quel bénéfice le fabricant peut-il espérer de sa vente ?

> Pour ne pas se tromper dans l'interprétation des données, on peut réaliser un diagramme de Vien (schéma « patates ») représentant la situation.

13 TIRAGES AVEC REMISE

★★ | 25 min | ▸ P. 281

Une urne contient 3 boules vertes, 2 rouges et 5 bleues.

Ces boules sont indiscernables au toucher.

On tire successivement, et avec remise, trois boules de l'urne.

a. À l'aide d'un arbre pondéré, déterminer la loi de probabilité du nombre X de boules rouges tirées.

> Pour la construction et l'utilisation de l'arbre : voir le chapitre 8.

b. Paul constate que le nombre de boules bleues est plus de deux fois supérieur au nombre de boules rouges, donc il prétend qu'il y a plus de chances d'obtenir au moins deux boules bleues qu'au moins une boule rouge.
Qu'en pensez-vous ?

ALLER PLUS LOIN

14 MARCHE ALÉATOIRE | ★★ | 50 min | ▸ P. 282

Points	+5		–2				+3	–4	
Abscisse	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4

Un pion est initialement positionné sur la case d'abscisse 0.
Un joueur le déplace au hasard d'une case vers la droite ou vers la gauche 4 fois d'affilée. Chaque déplacement est supposé indépendant du précédent. Le joueur marque les points correspondants aux cases par lesquelles le pion est passé.
On note T la variable aléatoire correspondant au total de points obtenus.

1. Simulation

L'algorithme suivant, donné en langage naturel, simule 10 000 parties et renvoie la moyenne des points obtenus au cours de ces 10 000 parties.

```
S ← 0
  Pour n allant de 0 à 9999 :
  x ← 0, t ← 0
Pour i allant de 0 à 3 :
     z ← nombre aléatoire entier 0 ou 1
     Si z = 0, alors
         x ← x+1
         sinon x ← x-1
     Fin Si
     Si x = 2, alors
         t ← t + 3
     Si x = 3, alors
         t ← t – 4
     Si x = –2, alors
         t ← t – 2
  Si x = –4, alors
         t ← t + 5
     Fin Si
  Fin Pour
     S ← S+t
     Fin Pour
  m ← S/10 000
  Afficher m
```

a. Que représentent x, t, i, S et m ?
b. À quoi sert z ?
c. Écrire ce script en Python et l'exécuter une dizaine de fois.
Ce jeu semble-t-il équitable ?

Penser à importer la fonction randint de la bibliothèque random

2. Modélisation

a. Déterminer la loi de T, puis son espérance.
Comparer aux résultats obtenus par simulation et commenter.

Construire un arbre non pondéré qui donne tous les déplacements possibles

b. Quelle valeur p doit-on donner à la case d'abscisse 4 pour que le jeu soit équitable ?

Un jeu est équitable si l'espérance du gain est nulle.

c. Déterminer la loi de T et son espérance si on reprend la règle de départ mais qu'on suppose cette fois qu'à chaque déplacement, le pion est déplacé vers la gauche avec la probabilité 0,6.

On pourra pondérer l'arbre construit au **a.**

15 TIRAGES AVEC REMISE

★★★ | 20 min | ▸ P. 284

Une urne contient n boules blanches et $n-5$ boules noires $(n \geqslant 5)$ indiscernables au toucher.
Un joueur tire successivement, et avec remise, deux boules de l'urne.
Si ces deux boules sont de même couleur, le joueur donne un euro.
Si ces deux boules sont de couleurs différentes, le joueur reçoit un euro.

a. Pour quelles valeurs de n le jeu est-il favorable au joueur ?

Déterminer la loi du gain du joueur, puis exprimer son espérance en fonction de n et étudier son signe.

b. Même question si le joueur reçoit désormais 2 euros si les boules sont de couleurs différentes.

On pourra démontrer que l'espérance du gain est égale à :

$$\frac{2n^2-10n-25}{(2n-5)^2},$$

puis étudier le signe de ce quotient (voir le chapitre 3 sur le second degré).

16 UNE MARTINGALE

★★★ | 30 min | ▸ P. 286

Règle du jeu : on lance une pièce bien équilibrée.
Si elle tombe sur Pile, le joueur perd sa mise.
Si elle tombe sur Face, le joueur gagne deux fois sa mise.
Un joueur dispose de 20 euros. Il commence par miser un euro, puis applique la stratégie suivante :

- si la pièce tombe sur Face, il s'arrête ;
- si la pièce tombe sur Pile, il rejoue en doublant sa mise (tant qu'il le peut).

1. Simulation

Créer une fonction gain_moyen en Python qui simule n parties ($n \in \mathbb{N}^*$) et retourne la moyenne du gain algébrique du joueur sur ces n parties.

On pourra s'inspirer de l'exercice 3.

2. Modélisation

a. Quel est le nombre maximal N de lancers au cours d'une partie ?

On ne peut doubler sa mise que si on a encore assez d'argent…

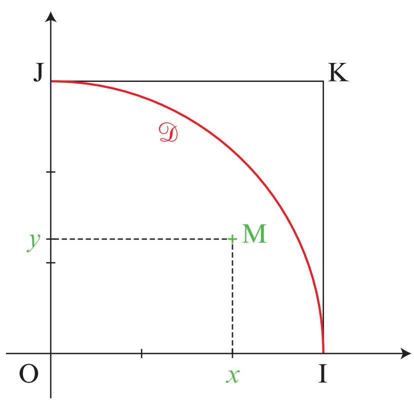
b. Déterminer l'espérance théorique du gain algébrique du joueur.
Le jeu « en vaut-il la chandelle » ?

Construire un arbre pondéré avec N lancers successifs.

17 LA MÉTHODE DE MONTE-CARLO

★★★★ | 30 min | ▸ P. 288

Dans un repère orthonormal $(\mathrm{O, I, J})$, on considère le carré OIKJ où $\mathrm{K}(1\ ;\ 1)$.



1. Quelles conditions doivent vérifier les coordonnées $(x\ ;\ y)$ d'un point M du plan pour qu'il soit situé à l'intérieur du carré ?

2. Soit $\mathscr{D}$ le quart de disque de centre O et de rayon 1 contenu dans le carré OIKJ.

a. Quelle proportion p de l'aire du carré OIKJ, l'aire de $\mathscr{D}$ représente-t-elle ?

b. Justifier que si $\mathrm{M}(x\ ;\ y)$ est un point à l'intérieur du carré OIKJ alors :

$$\mathrm{M} \in \mathcal{D} \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leqslant 1.$$

3. On convient que choisir un point M au hasard dans le carré revient à choisir ses coordonnées x et y aléatoirement entre 0 et 1.
Écrire un script en Python qui crée 10 000 points au hasard à l'intérieur du carré OIKJ, colorie en rouge ceux situés dans le quart de disque $\mathcal{D}$, en bleu ceux qui n'y sont pas, et affiche la proportion f des points dans $\mathcal{D}$.

Penser à importer et à donner un alias aux bibliothèques matplotlib.pyplot et numpy : voir chapitre 1.
Si np est l'alias de numpy, l'instruction np.random.random(10000) permet de créer une liste de 10 000 valeurs aléatoires comprises entre 0 et 1.
Le temps de calcul peut-être long… patience…

4. On estime que dans plus de 95 % des échantillons de taille $n = 10\,000$ ainsi créés, la proportion p est comprise entre $f - \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ et $f + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.
Quel encadrement de π peut-on donner d'après cette simulation ?
Est-ce conforme à ce que vous savez de π ?

CORRIGÉS

1 À LA CALCULATRICE, À LA MAIN, AVEC PYTHON

a. Les calculs se font directement à la machine en suivant la méthode 2.
Pour un calcul à la main :

$$E(X) = -10 \times 0{,}1 + (-5) \times 0{,}3 + 0 \times 0{,}4 + 15 \times 0{,}2 = \mathbf{0{,}5}.$$

x_i	–10	–5	0	15
$x_i - E(X)$	–10,5	–5,5	–0,5	14,5
$(x_i - \mathrm{E(X)})^2$	110,25	30,25	0,25	210,25
$p(X = x_i)$	0,1	0,3	0,4	0,2

$V(Y) = 110{,}25 \times 0{,}1 + 30{,}25 \times 0{,}3 + 0{,}25 \times 0{,}4 + 210{,}25 \times 0{,}2 = \mathbf{62{,}25}$.

$\sigma(X) = \sqrt{62{,}25} \approx \mathbf{7{,}89}$ **à** $\mathbf{10^{-2}}$ **près**.

b. La ligne 4 devient L=[x[i]*p[i] for i in range(4)]
La ligne 6 devient M=[p[i]*(x[i]-E)**2 for i in range(4)]
La ligne 7 devient V=sum(M)
La ligne 9 devient print('V(X)=',round(V,2))
La ligne 10 print('sigma(X)=',round(sqrt(V),2))

sum(M) renvoie la somme des tous les éléments de la liste M
round(E,2) renvoie une valeur arrondie de E à 10^{-2} près.

L'exécution de ce script renvoie des résultats conformes au **1.** :

$E(X)$= 0.5 ; $V(X)$= 62.25 et sigma(X)= 7.89.

2 DEUX INCONNUES

La somme des probabilités de toutes les issues possibles pour X vaut 1 :

$0{,}3 + 0{,}6 + y = 1 \Leftrightarrow y = 1 - 0{,}9 \Leftrightarrow \boldsymbol{y} = \mathbf{0{,}1}$.

$$E(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i \times p\left(X = x_i\right) = -6 \times 0{,}3 + x \times 0{,}6 + 3 \times 0{,}1 = 0{,}6x - 1{,}5.$$

Ainsi $E(X) = 0 \Leftrightarrow 0{,}6x - 1{,}5 = 0 \Leftrightarrow 0{,}6x = 1{,}5 \Leftrightarrow x = \dfrac{1{,}5}{0{,}6} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \mathbf{2{,}5}$.

3 GAIN ALGÉBRIQUE

1. Il y a $1000 - 10 = 990$ billets qui rapportent 0 et coûtent 2 euros : pour ces billets, le gain (qui est une perte) est de $0 - 2 = -2$ euros.
7 billets rapportent 50 euros et coûtent 2 euros, soit un gain de $50 - 2 = 48$ euros.
2 billets rapportent 100 euros et coûtent 2 euros, soit un gain de $100 - 2 = 98$ euros.
1 billet rapporte 500 euros et coûte 2 euros, soit un gain de $500 - 2 = 498$ euros.
***G* peut prendre les valeurs –2 ; 48 ; 98 et 498.**

2. Les achats de billets sont équiprobables. On en déduit la loi de G :

Gain	–2	48	98	498
Probabilité	$\dfrac{990}{1\,000} = 0{,}99$	$\dfrac{7}{1\,000} = 0{,}007$	$\dfrac{2}{1\,000} = 0{,}002$	$\dfrac{1}{1\,000} = 0{,}001$

3. L'espérance du gain est :
$E(G) = -2 \times 0{,}99 + 48 \times 0{,}007 + 98 \times 0{,}002 + 498 \times 0{,}001 = \mathbf{-0{,}95}$.

Les 1 000 billets coûtant $1000 \times 2 = 2\,000$ euros, et rapportant 1050 euros, le gain global est de $1050 - 2\,000 = -950$ euros, donc le gain moyen est de $-\dfrac{950}{1000} = -0{,}95$ euros par billet.
Les billets étant achetés de façon équiprobable, on retrouve bien la valeur de $E(G)$.

Écart-type : $\sigma \approx$ **16,92 à 10^{-2} près**.

4. a. Ligne 8 : `elif 4<=b<=10:`

Ligne 11 : `g=-2`

b. Ligne 18 `L=[gain() for i in range(10000)]`

Ligne 19 `m=sum(L)/10000`

Ligne 20 `if E-2*s/sqrt(10000)<=m<=E+2*s/sqrt(10000):`

Ligne 21 `A=A+1`

Ligne 22 `print("pourcentage d'échantillons :",A/2, "%")`

On observe que ce pourcentage dépasse 95% la plupart du temps.

4 L'ADDITION !

a. Soit X la variable aléatoire représentant le prix payé par un client.
$E(X) = 8 \times 0{,}2 + 15 \times 0{,}4 + 22 \times 0{,}3 + 30 \times 0{,}1 = 17{,}2$.
Le restaurateur peut espérer qu'en moyenne un client dépense 17,2 euros.

Donc, le chiffre d'affaires mensuel que peut espérer le restaurateur, s'il sert 500 clients, est $500 \times E(X)$ soit **8 600 euros**.

b. Soit Y le prix payé par un client après la modification A et Z le prix payé par un client après la modification B.
$Y = \left(1 + \dfrac{10}{100}\right) \times X = 1{,}1X$.
Donc $E(Y) = E(1{,}1X) = 1{,}1 \times E(X) = 18{,}92$.
D'après l'énoncé, $Z = X + 1$, donc $E(Z) = E(X+1) = E(X) + 1$, soit $E(Z) = 18{,}2$.

$E(Y) > E(Z)$ donc, s'il espère gagner le plus possible, **le restaurateur choisira la modification A**.

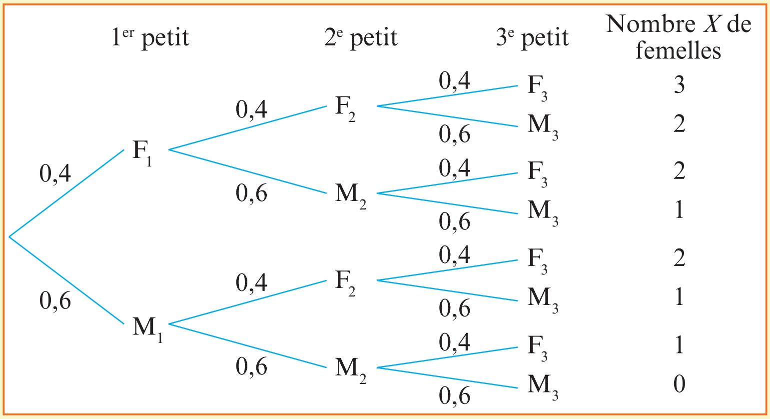
5 NAISSANCES

À chaque naissance, notons F l'événement :« le petit est une femelle » et M l'événement : « le petit est un mâle ».

D'après l'énoncé, $p(\mathrm{F}) = \dfrac{4}{10} = 0{,}4$, donc :

$$p(\mathrm{M}) = 1 - p(\mathrm{F}) = \frac{6}{10} = 0{,}6 \text{ car } \mathrm{M} = \overline{\mathrm{F}}.$$

Les trois naissances étant indépendantes, ou peut schématiser les différentes portées possibles, en numérotant suivant l'ordre d'arrivée des petits :



La propriété relative à la répétition d'expériences identiques et indépendantes (voir le chapitre 7) permet d'en déduire la loi de X.

$p(X=0)=p\left(M_1M_2M_3\right)=p(M)^3=0{,}6^3=0{,}216$.

$$p(X=1)=p\left(F_1M_2M_3\right)+p\left(M_1F_2M_3\right)+p\left(M_1M_2F_3\right)$$
$$=0{,}4\times0{,}6\times0{,}6+0{,}6\times0{,}4\times0{,}6+0{,}6\times0{,}6\times0{,}4=\mathbf{0{,}432}.$$

De même,

$p(X=2)=0{,}4\times0{,}4\times0{,}6+0{,}4\times0{,}6\times0{,}4+0{,}6\times0{,}4\times0{,}4=\mathbf{0{,}288}$.

Enfin $p(X=3)=0{,}4^3=\mathbf{0{,}064}$.

On résume ces résultats dans un tableau :

Nombre de femelles x_i	0	1	2	3
$p(X=x_i)$	0,216	0,432	0,288	0,064

On vérifie que : $0{,}216+0{,}432+0{,}288+0{,}064=1$.

6 VRAI OU FAUX ?

Les 10 secteurs ont tous la même probabilité de sortie : $\dfrac{1}{10}$.

Soit X le gain (algébrique) du joueur. La loi de probabilité de X est :

x_i	–10	–5	0	3	8	12
$p(X=x_i)$	0,1	$2\times0{,}1=0{,}2$	$4\times0{,}1=0{,}4$	0,1	0,1	0,1

a. Le joueur est gagnant si $X>0$.

$p(X>0)=p(X=3)+p(X=8)+p(X=12)=0{,}1+0{,}1+0{,}1=0{,}3$.

L'affirmation est vraie.

b. Le joueur est perdant si $X<0$.

$p(X<0)=p(X=-10)+p(X=-5)=0{,}1+0{,}2=0{,}3$.

L'affirmation est vraie.

c. Le jeu est équitable si $E(X)=0$.

$$E(X)=\sum_{i=1}^{6} x_i \times p(X=x_i) \quad \text{(voir le cours II.2.)}$$

$$= -10\times 0{,}1+(-5)\times 0{,}2+0\times 0{,}4+3\times 0{,}1+8\times 0{,}1+12\times 0{,}1=0{,}3.$$

$E(X)>0$, donc le jeu est favorable au joueur : il n'est pas équitable.

L'affirmation est donc fausse.

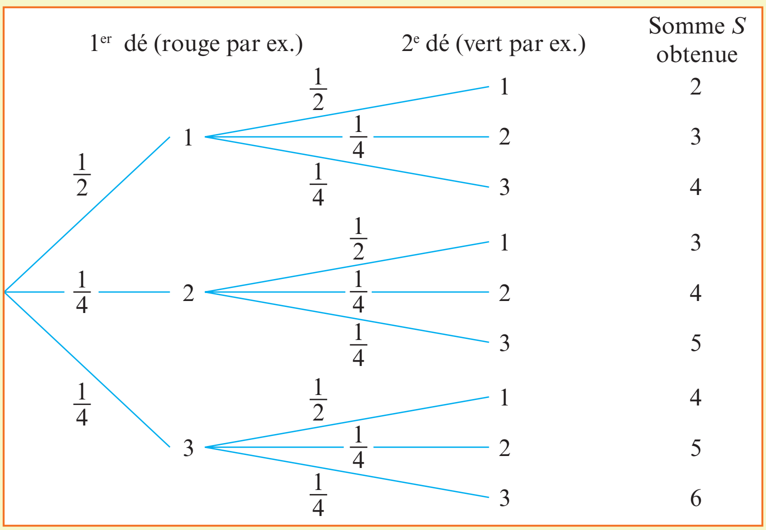
Le jeu n'est pas équitable, alors que **a.** et **b.** sont vraies.
Pour qu'un jeu soit équitable, ce n'est pas la probabilité de « gagner » ou de « perdre » qui compte, mais le gain qu'on peut espérer en tirer.

7 DÉS ICOSAÉDRIQUES

Les dés sont bien équilibrés, donc chacune des 20 faces a la même probabilité de sortie : elles sont équiprobables.

Donc, pour chaque dé, la probabilité d'obtenir 1 est $p(1)=\frac{10}{20}=\frac{1}{2}$, la probabilité d'obtenir 2 est $p(2)=\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$, celle d'obtenir 3 est $p(3)=\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$.

On peut alors représenter le lancer de ces deux dés à l'aide d'un arbre pondéré :



Tout se passe comme si on avait répété deux fois la même expérience de façon indépendante, ce qui nous permet de multiplier les probabilités le long des branches pour obtenir la loi de S :

$p(S=2)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$; $p(S=3)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$;

$p(S=4)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{16}$; $p(S=5)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$;

$p(S=6)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$.

D'où le tableau :

Somme obtenue x_i	2	3	4	5	6
$p(S = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$

On ne peut pas simplement compter le nombre de branches favorables à l'événement $(S = 2)$ et diviser par le nombre total de résultats, car les numéros obtenus par chaque dé ne sont pas équiprobables. Il faudrait créer un arbre avec les résultats des 20 faces du premier dé, suivis des 20 faces du second : $20 \times 20 = 400$ résultats équiprobables… c'est bien trop fastidieux !

8 SECOND DEGRÉ

a. Les couples $(b\,;c)$ sont obtenus par tirages successifs de deux boules parmi 4 indiscernables au toucher, donc équiprobables : il y a $4 \times 4 = 16$ couples possibles, chaque couple a ainsi une probabilité $\frac{1}{16}$ d'être obtenu.

On peut donc associer à l'ensemble des couples la loi équirépartie.

b. Le nombre de solutions réelles de l'équation du second degré $x^2 + bx + c = 0$ dépend du discriminant $\Delta = b^2 - 4 \times 1 \times c = b^2 - 4c$ selon la règle suivante :

si $\Delta > 0$, $S = 2$; si $\Delta = 0$, $S = 1$; si $\Delta < 0$, $S = 0$.

On obtient donc :

b \ c	1	2	3	4
1	$\Delta = -3$ $S = 0$	$\Delta = -7$ $S = 0$	$\Delta = -11$ $S = 0$	$\Delta = -15$ $S = 0$
2	$\Delta = 0$ $S = 1$	$\Delta = -4$ $S = 0$	$\Delta = -8$ $S = 0$	$\Delta = -12$ $S = 0$
3	$\Delta = 5$ $S = 2$	$\Delta = 1$ $S = 2$	$\Delta = -3$ $S = 0$	$\Delta = -7$ $S = 0$
4	$\Delta = 12$ $S = 2$	$\Delta = 8$ $S = 2$	$\Delta = 4$ $S = 2$	$\Delta = 0$ $S = 1$

D'où la loi de probabilité de S :

s_i	0	1	2
$p(S = s_i)$	$\frac{9}{16}$	$\frac{2}{16} = \frac{1}{8}$	$\frac{5}{16}$

L'espérance de S est :

$$E(S) = 0 \times \frac{9}{16} + 1 \times \frac{1}{8} + 2 \times \frac{5}{16} = \frac{6}{8} = \mathbf{0{,}75}.$$

9 TIRAGES SANS REMISE

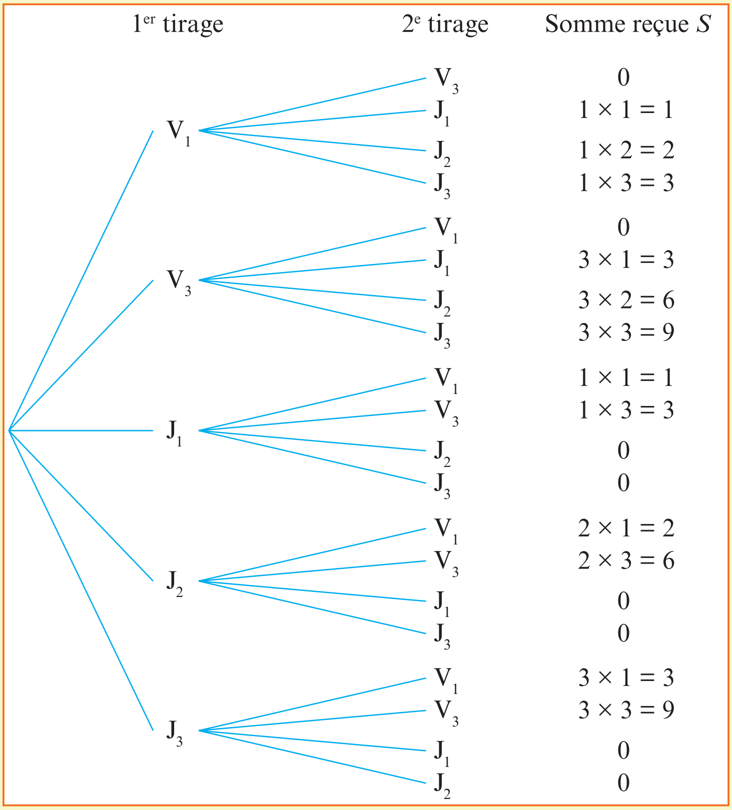
On note G le gain algébrique du joueur et S la somme reçue :

$$G = S - n.$$

On a alors par linéarité de l'espérance :

$$E(G) = E(S) - n.$$

On note V_1 et V_3 les boules vertes, J_1, J_2 et J_3 les boules jaunes.
Puisque les tirages s'effectuent sans remise, on peut construire l'arbre suivant :



Les boules sont indiscernables au toucher, donc ces 20 issues sont équiprobables.
On en déduit la loi de probabilité de la somme reçue S :

s_i	0	1	2	3	6	9
$p(S = s_i)$	$\frac{8}{20} = 0{,}4$	$\frac{2}{20} = 0{,}1$	$\frac{2}{20} = 0{,}1$	$\frac{4}{20} = 0{,}2$	$\frac{2}{20} = 0{,}1$	$\frac{2}{20} = 0{,}1$

$$E(S) = 0 \times 0{,}4 + 1 \times 0{,}1 + 2 \times 0{,}1 + 3 \times 0{,}2 + 6 \times 0{,}1 + 9 \times 0{,}1$$
$$= 2{,}4.$$

Donc $E(G) = E(S) - n = 2{,}4 - n$. Ainsi :

$$E(G) > 0 \Leftrightarrow 2{,}4 - n > 0$$
$$\Leftrightarrow -n > -2{,}4$$
$$\Leftrightarrow n < 2{,}4.$$

Donc la mise entière maximale qui permet au jeu d'être favorable au joueur est $n = 2$.

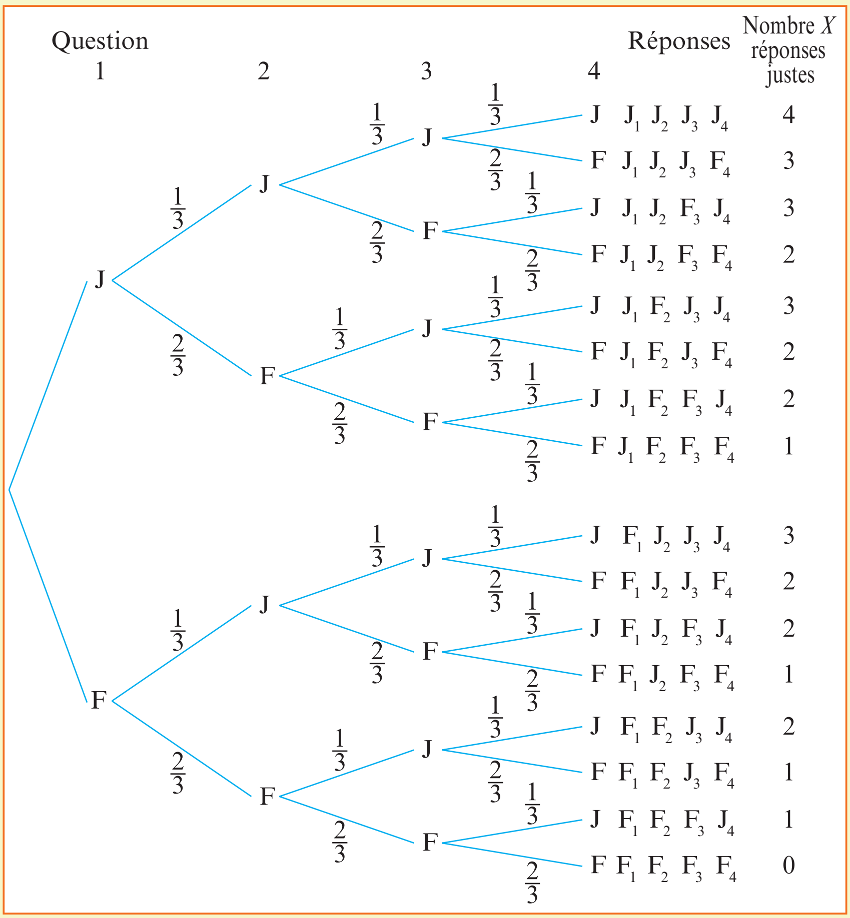
10 AU CHOIX

1. Pour chacune des 4 questions, il y a 3 réponses.
Il y a donc $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$ façons équiprobables, si l'on répond au hasard, de compléter ce questionnaire.
$X = 4$ lorsqu'on a trouvé les 4 bonnes réponses, c'est-à-dire avec 1 chance sur 81, et non pas 1 chance sur 5 s'il s'agissait de la loi équirépartie sur $\{0\,;1\,;2\,;3\,;4\}$.
Donc X ne suit pas la loi équirépartie sur $\{0\,;1\,;2\,;3\,;4\}$.

2. Pour une question donnée, on note J l'événement : « la réponse donnée est juste » et F : « la réponse donnée est fausse ».
Le choix se fait au hasard parmi les 3 réponses proposées, dont une seule est correcte, donc :

$$p(\mathrm{J}) = \frac{1}{3} \text{ et } p(\mathrm{F}) = \frac{2}{3}.$$

On peut modéliser la situation par un arbre pondéré, les réponses aux questions pouvant être considérées comme quatres répétitions indépendantes d'une même expérience.



En multipliant les probabilités le long des branches, on obtient :

$$p(X=0)=p\left(F_1F_2F_3F_4\right)=p(F)^4=\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{16}{81}.$$

$$p(X=1)=p\left(J_1F_2F_3F_4\right)+p\left(F_1J_2F_3F_4\right)+p\left(F_1F_2J_3F_4\right)+p\left(F_1F_2F_3J_4\right)$$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}$$

$$p(X=1)=4\times\left(\frac{2}{3}\right)^3\times\frac{1}{3}=\frac{32}{81}.$$

De même : $p(X=2)=6\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{24}{81}=\mathbf{\frac{8}{27}}$

$$p(X=3)=4\times\left(\frac{1}{3}\right)^3\times\left(\frac{2}{3}\right)=\mathbf{\frac{8}{81}}$$

$$p(X=4)=\left(\frac{1}{3}\right)^4=\mathbf{\frac{1}{81}}$$

On en déduit l'espérance de X :

$$\boldsymbol{E(X)}=0\times\frac{16}{81}+1\times\frac{32}{81}+2\times\frac{24}{81}+3\times\frac{8}{81}+4\times\frac{1}{81}=\frac{108}{81}=\mathbf{\frac{4}{3}}.$$

3. a. 4 réponses justes apportent $Y=4\times3=12$ points ;
3 réponses justes et une erreur apportent $Y=3\times3-1=8$ points ;
2 réponses justes et deux erreurs apportent $Y=2\times3-2\times1=4$ points ;
1 réponse juste et 3 erreurs apportent $Y=1\times3-3\times1=0$ point,
4 réponses fausses apportent $Y=-4$ points.
À l'aide de l'arbre, on obtient la loi de Y :

y_i	-4	0	4	8	12
$p\left(Y=y_i\right)$	$\frac{16}{81}$	$\frac{32}{81}$	$\frac{24}{81}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{1}{81}$

$$\boldsymbol{E(Y)}=-4\times\frac{16}{81}+0\times\frac{32}{81}+4\times\frac{24}{81}+8\times\frac{8}{81}+12\times\frac{1}{81}=\frac{108}{81}=\mathbf{\frac{4}{3}}.$$

b. Le nombre de mauvaises réponses données est $Z=4-X$.
Pour X bonnes réponses, on gagne $3X$ points.
Pour Z mauvaises réponses, on gagne $-1\times Z=-(4-X)=X-4$ points.
La note obtenue est donc : $Y=3X+(X-4)=4X-4$.
Par linéarité de l'espérance, on trouve alors :

$$\boldsymbol{E(Y)}=E(4X-4)=4E(X)-4=4\times\frac{4}{3}-4=\mathbf{\frac{4}{3}}.$$

11 LANCER DE DÉ

a. Les gains possibles sont les suivants :

Face obtenue	1	2	3	4	5	6
Gain x_i	-1	-2	3	-4	-5	6

Le dé n'étant pas truqué, chacune des 6 faces a la même probabilité d'apparaître.
La loi de probabilité associée à cette épreuve est donc :

Gain x_i	–1	–2	3	–4	–5	6
Probabilité p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Le gain peut être négatif !

b. Détaillons les calculs pour information.
• Pour l'espérance de X,

$$E(X) = -1\times\frac{1}{6} - 2\times\frac{1}{6} + 3\times\frac{1}{6} - 4\times\frac{1}{6} - 5\times\frac{1}{6} + 6\times\frac{1}{6} = -\frac{3}{6} = \mathbf{-0,50}.$$

Cela signifie qu'en moyenne, le joueur perd $0,50$ €.
Le jeu n'est donc pas équitable.
• Calcul de la variance :

Gain x_i	–1	–2	3	–4	–5	6
$(x_i - E(x))$	–0,5	–1,5	3,5	–3,5	–4,5	6,5
$(x_i - E(x))^2$	0,25	2,25	12,25	12,25	20,25	42,25
Probabilité p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

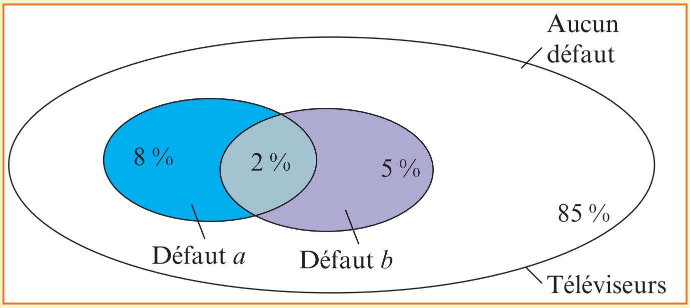
$$V = 0,25\times\frac{1}{6} + 2,25\times\frac{1}{6} + 12,25\times\frac{1}{6} + 12,25\times\frac{1}{6} + 20,25\times\frac{1}{6} + 42,25\times\frac{1}{6}.$$

$$\boldsymbol{V(X) = \frac{89,5}{6} \approx 14,92 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}}$$

Sans justification signifie : « à l'aide des outils statistiques de la calculatrice ».
Voir la méthode 2.

12 DES PANNES

On peut schématiser le problème à l'aide d'un diagramme de Venn.



$10 - 2 = 8\,\%$ des téléviseur souffrent seulement du défaut a.
$7 - 2 = 5\,\%$ des téléviseurs souffrent seulement du défaut b.
$100 - (8 + 2 + 5) = 85\,\%$ des téléviseurs n'ont aucun défaut.

Le bénéfice B est de :
$500 - 200 = 300$ euros si le téléviseur n'a aucun défaut ;
$500 - 200 - 50 = 250$ euros si le téléviseur a seulement du défaut a ;
$500 - 200 - 100 = 200$ euros si le téléviseur a seulement du défaut b ;
$500 - 200 - 100 - 50 = 150$ euros, si le téléviseur a les deux défauts a et b.
Il y a équiprobabilité du choix du téléviseur, donc la loi du bénéfice B est :

b_i	300	250	200	150
$p(B = b_i)$	0,85	0,08	0,05	0,02

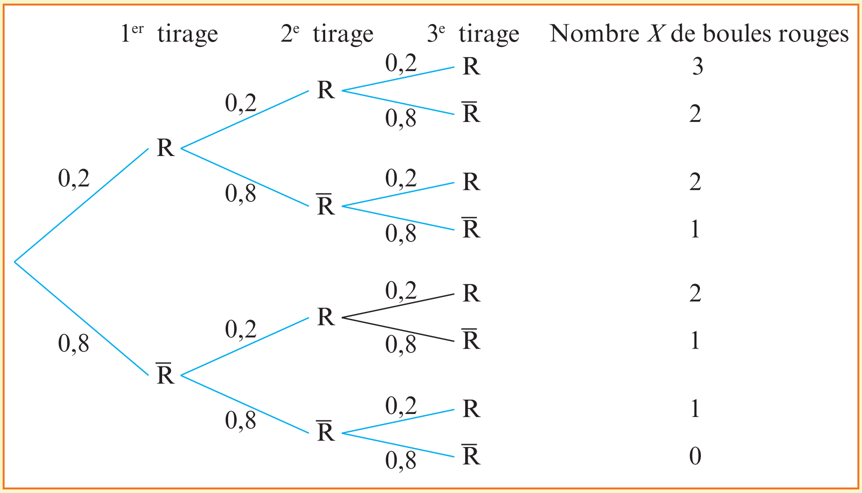
$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{B}) = 300 \times 0,85 + 250 \times 0,08 + 200 \times 0,05 + 150 \times 0,02 = \mathbf{288}.$$

13 TIRAGES AVEC REMISE

a. On répète trois fois la même expérience de façon indépendante.
À chaque tirage, notons R l'événement : « la boule tirée est rouge », V l'événement : « la boule tirée est verte » et B l'événement : « la boule tirée est bleue ».
Les boules sont indiscernables au toucher, donc leurs tirages sont équiprobables et :

$$p(\mathrm{V}) = \frac{3}{3+2+5} = \frac{3}{10} = 0,3\,;\ p(\mathrm{R}) = \frac{2}{10} = 0,2 \text{ et } p(\mathrm{B}) = \frac{5}{10} = 0,5.$$

On s'intéresse seulement à la couleur rouge, c'est-à-dire aux apparitions des événements R et $\overline{\mathrm{R}}$. On a $p(\mathrm{R}) = 0,2$ donc $p\left(\overline{\mathrm{R}}\right) = 1 - p(\mathrm{R}) = 0,8$.
On obtient un arbre pondéré ayant $2^3 = 8$ branches.



$p(X = 0) = 0,8^3 = \mathbf{0,512}$
$p(X = 1) = 3 \times 0,2 \times 0,8^2 = \mathbf{0,384}$
$p(X = 2) = 3 \times 0,8 \times 0,2^2 = \mathbf{0,096}$
$p(X = 3) = 0,2^3 = \mathbf{0,008}$.

b. On connaît la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge :

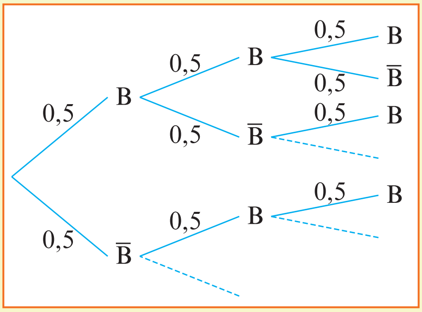
$$p(X \geqslant 1) = p(X = 1) + p(X = 2) + p(X = 3) = \mathbf{0,488}.$$

Autre méthode : $p(X \geqslant 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - 0,512 = 0,488$.

Si Y désigne le nombre de boules bleues :

$$p(Y \geqslant 2) = p(Y = 2) + p(Y = 3).$$

On dresse un nouvel arbre où on ne s'intéresse cette fois qu'à l'apparition de la couleur bleue. $p(\mathrm{B}) = 0{,}5$ donc $p(\overline{\mathrm{B}}) = 0{,}5$. On peut même ne représenter que les branches qui contiennent 2 ou 3 boules bleues :



On a alors $p(Y = 2) = 3 \times 0{,}5^3$ et $p(Y = 3) = 0{,}5^3$ donc :

$$p(Y \geqslant 2) = 4 \times 0{,}5^3 = 0{,}5 > p(X \geqslant 1) :$$ **Paul a raison !**

14 MARCHE ALÉATOIRE

1. Simulation

a. x représente l'abscisse du pion ;
t représente le total des points obtenus au cours d'une partie ;
i représente le numéro du déplacement au cours d'une partie ;
S représente le nombre total de points obtenus au cours des 10 000 parties ;
m représente la moyenne des points obtenus sur les 10 000 parties.

b. z sert à décider si le pion se déplace vers la droite (si z = 0), ou vers la gauche (si z = 1).

z ayant une chance sur deux d'être égal à 0, la règle du jeu est respectée.

c. Voici le script écrit en Python :

```
from random import randint
S=0
for n in range(10000):
    x,t=0,0
    for i in range(4):
        z=randint(0,1)
        if z==0:
            x=x+1
        else :
            x=x-1
    if x==2:
        t=t+3
    elif x==3:
        t=t-4
    elif x==-2:
        t=t-2
    elif x==-4:
        t=t+5
    S=S+t
m=S/10000
print(m)
```

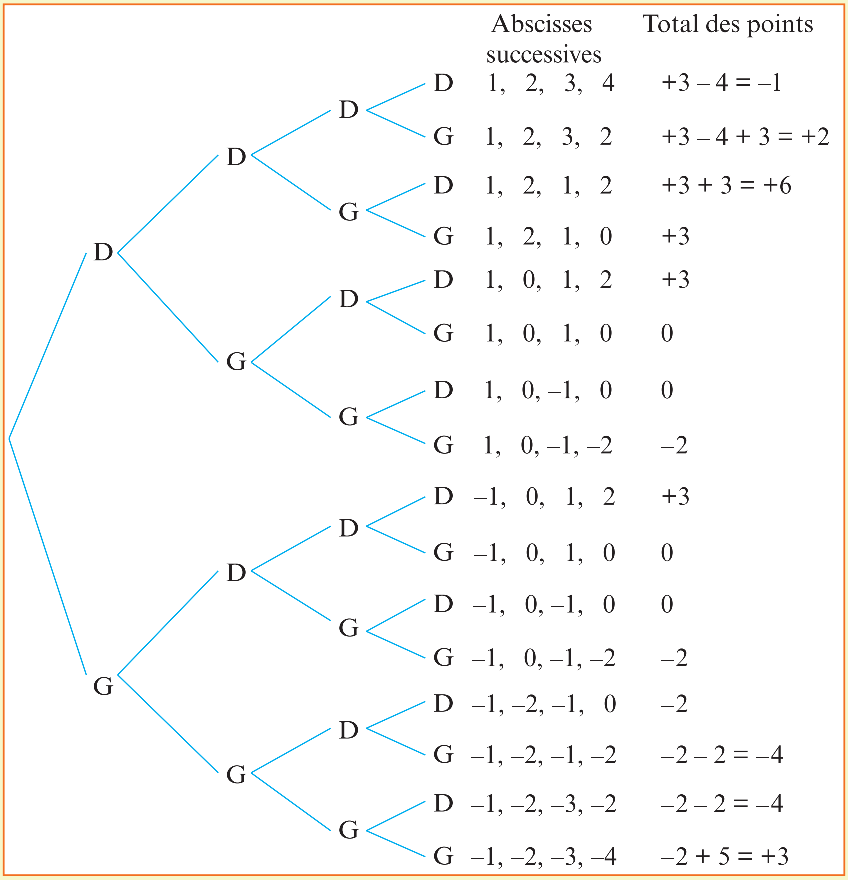
10 simulations renvoient (par exemple !) les valeurs suivantes pour m :

0,3154 ; 0,3111 ; 0,3386 ; 0,2551 ; 0,3417 ;0,3027 ; 0,3562 ; 0,3182 ; 0,3216 ; 0,3104.

On observe que la moyenne des points obtenus, c'est-à-dire l'espérance empirique du nombre de points, est positive : **le jeu semble favorable au joueur**.

2. Modélisation

a. On note D l'événement : « le joueur déplace le pion d'une case vers la droite » et G l'événement : « il le déplace d'une case vers la gauche ».



Les déplacements successifs étant équiprobables, ces 16 chemins le sont.

On en déduit la loi de probabilité de T :

t_i	-4	-2	-1	0	2	3	6
$p(T = t_i)$	$\frac{2}{16} = \frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

$$E(T) = -4 \times \frac{1}{8} + (-2) \times \frac{3}{16} + (-1) \times \frac{1}{16} + 0 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{16} + 3 \times \frac{1}{4} + 6 \times \frac{1}{16}$$

$$\boldsymbol{E(T)} = \frac{5}{16} = \mathbf{0,3125}.$$

On a bien $E(T) > 0$, et la valeur de 0,3125 est « assez proche » des résultats obtenus par simulation.

b. La case d'abscisse 4 n'est atteinte que pour le premier chemin, le seul à rapporter $+3-4=-1$ points.

Elle rapportera p points supplémentaires, avec la probabilité $\frac{1}{16}$. Le jeu est équitable si, et seulement si : $E(T)=0$, ce qui équivaut à :

$$\frac{5}{16}+p\times\frac{1}{16}=0.$$

Donc le jeu est équitable si, et seulement si, $p=-5$.

c. On peut réutiliser l'arbre, mais en pondérant chaque branche menant à G de 0,6 et chaque branche menant à D de $1-0,6=0,4$.

On obtient alors la loi suivante :

t_i	–4	–2	–1	0	2	3	6
$p(T=t_i)$	0,1 728	0,2 304	0,0 256	0,2 304	0,0 384	0,264	0, 0384

Par exemple :

$$\begin{aligned} p(T=-4) &= p(-1\,;-2\,;-1\,;-2)+p(-1\,;-2\,;-3\,;-2)\\ &= p(\text{GGDG})+p(\text{GGGD})\\ &= 0,6\times0,6\times0,4\times0,6+0,6\times0,6\times0,6\times0,4=0,172\,8.\end{aligned}$$

D'où l'espérance :

$$E(T)=-4\times0,1728+(-2)\times0,2304+(-1)\times0,0256+0\times0,2304$$
$$+2\times0,0384+3\times0,264+6\times0,0384$$

$E(T)=-0,0784<0.$

Dans ce cas, le jeu est défavorable au joueur.

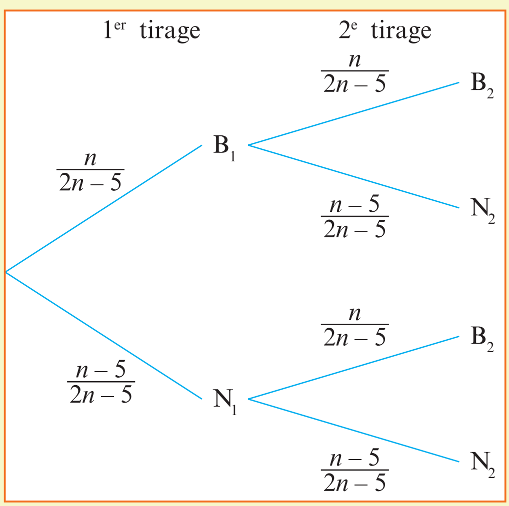
15 TIRAGES AVEC REMISE

a. Les deux tirages successifs sont identiques et indépendants. Les choix des $n+n-5=2n-5$ boules sont équiprobables. Si on note B l'événement :« la boule tirée est blanche » et N l'événement :« la boule tirée est noire » à chaque tirage on a :

$$p(\text{B})=\frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}=\frac{n}{2n-5}.$$

$$p(\text{N})=\frac{n-5}{2n-5}.$$

On peut donc représenter le jeu par l'arbre pondéré ci-contre :



Pour la construction et l'utilisation de l'arbre : voir le chapitre 8.

Si on note G le gain algébrique du joueur :

• $G = -1$ lorsque l'on tire B_1B_2 ou N_1N_2, événements incompatibles, donc

$$p(G=-1) = p(\mathrm{B})^2 + p(\mathrm{N})^2 = \left(\frac{n}{2n-5}\right)^2 + \left(\frac{n-5}{2n-5}\right)^2$$

$$p(G=-1) = \frac{n^2}{(2n-5)^2} + \frac{n^2-10n+25}{(2n-5)^2} = \frac{2n^2-10n+25}{(2n-5)^2}.$$

• $G = 1$ lorsque l'on tire B_1N_2 ou B_2N_1, événements incompatibles, donc :

$$p(G=1) = \frac{n}{2n-5} \times \frac{n-5}{2n-5} + \frac{n-5}{2n-5} \times \frac{n}{2n-5} = 2 \times \frac{n^2-5n}{(2n-5)^2}$$

$$p(G=1) = \frac{2n^2-10n}{(2n-5)^2}.$$

Autre méthode
$p(G=1) = 1 - p(G=-1)$

L'espérance du gain est donc, pour $n \geqslant 5$:

$$E(G) = -1 \times \frac{2n^2-10n+25}{(2n-5)^2} + 1 \times \frac{2n^2-10n}{(2n-5)^2} = -\frac{25}{(2n-5)^2} < 0.$$

Le jeu est toujours défavorable au joueur !

b. On a cette fois :

$$p(G=-1) = \frac{2n^2-10n+25}{(2n-5)^2} \text{ et } p(G=2) = \frac{2n^2-10n}{(2n-5)^2}.$$

$$E(G) = -1 \times \frac{2n^2-10n+25}{(2n-5)^2} + 2 \times \frac{2n^2-10n}{(2n-5)^2}$$

$$E(G) = \frac{-2n^2+10n-25+4n^2-20n}{(2n-5)^2}$$

$$E(G) = \frac{2n^2-10n-25}{(2n-5)^2}.$$

Pour $n \geqslant 5$, $(2n-5)^2 > 0$, donc $E(G)$ a le même signe que $2n^2-10n-25$.
Considérons le polynôme du second degré $2x^2-10x-25$.
Son discriminant est $\Delta = (-10)^2 - 4 \times 2 \times (-25) = 300 > 0$.

Il a donc 2 racines $x_1 = \dfrac{+10-\sqrt{300}}{2 \times 2} \approx -1{,}83$ à 10^{-2} près.

$$x_2 = \frac{10+\sqrt{300}}{4} \approx 6{,}83 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}$$

Puisque $a = 2 > 0$ on obtient le tableau suivant :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$2x^2-10x-25$		+	0	–	0	+	

Comme $n \geqslant 5$, $2n^2-10n-25 > 0 \Leftrightarrow n > x_2 \Leftrightarrow n \geqslant 7$.

Le jeu est donc favorable au joueur dès que $n \geqslant 7$.

16 UNE MARTINGALE

1. Dans ce script f vaut 0 si la pièce donne Pile et 1 si elle donne Face :

```
1  from random import randint
2  def gain_moyen(n):
3      G=0
4      for i in range(n):
5          S=20
6          m=1
7          f=0
8          while S>=m and f==0:
9              if randint(0,1)==0:
10                 S=S-m
11                 m=2*m
12             else:
13                 S=S+m
14                 f=1
15         G=G+S-20
16     return print(G/n)
```

À la ligne 13, le joueur reçoit 2 fois sa mise, moins sa mise…

2. a. Le jeu s'arrête lorsque la pièce tombe sur Face, ou lorsque le joueur n'a plus assez d'argent pour miser.
Supposons donc que la pièce tombe à chaque fois sur Pile, et notons S_n la somme dont dispose le joueur au bout de n lancers (on a bien $S_0 = 20$ pour $n = 0$, c'est-à-dire avant le 1er lancer).

Pour $n = 1$, $S_1 = S_0 - 1 = 19$, car le joueur a misé 1 euro.

Pour $n = 2$, $S_2 = S_1 - 2 \times 1 = 17$, car le joueur a doublé sa mise.

De même : $S_3 = S_2 - 2 \times 2 = 13$ et $S_4 = S_3 - 2 \times 4 = 5$.

Le joueur doit s'arrêter, car il ne peut miser les $2 \times 8 = 16$ euros prévus dans sa stratégie. **Ainsi, le nombre maximal de lancers est $N = 4$.**

La mise au n-ième lancer est de 2^{n-1} euros. Les mises perdues se cumulant à chaque lancer, on a donc, pour tout n :

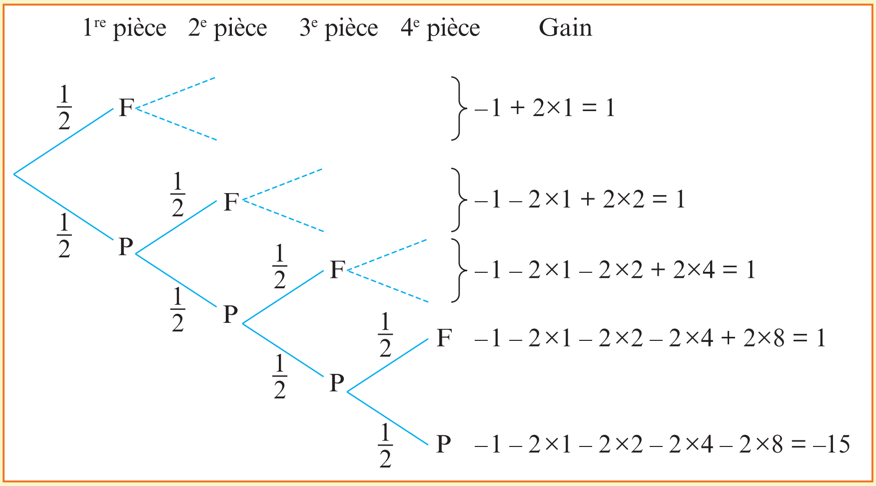
$$S_n = S_0 - (1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1}) = S_0 - \frac{2^n - 1}{2 - 1} = S_0 + 1 - 2^n$$

Quelle que soit la somme S_0 dont le joueur dispose au départ, le jeu s'arrêtera dès que la somme dont il dispose à l'issue du n-ième lancer est inférieure à la mise du $(n+1)$-ième lancer :

$$S_n < 2^n \Leftrightarrow S_0 + 1 - 2^n < 2^n$$
$$\Leftrightarrow 2^n + 2^n > S_0 + 1.$$

Ce qui ne manque jamais d'arriver !

b. Notons G le gain algébrique du joueur.
On peut schématiser les résultats à l'aide d'un arbre pondéré représentant 4 lancers indépendants, identiques d'une pièce bien équilibrée.
On va se contenter ici des branches qui nous intéressent réellement d'après la règle du jeu :



En multipliant le long des branches de l'arbre pondéré, et à l'aide de la formule des probabilités totales, on obtient la loi du gain G :

$$p(G=1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{15}{16}.$$

$$p(G=-15) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}.$$

Pour la construction et l'utilisation de l'arbre : voir le chapitre 8.

D'où l'espérance du gain :

$$E(G) = 1\times\frac{15}{16} + (-15)\times\frac{1}{16} = 0.$$

Le jeu est équitable.

Le gain maximal obtenu avec cette stratégie est de 1 euro.

La perte maximale, bien qu'assez peu probable (1 chance sur 16), est par contre de 15 euros.

Cette stratégie ne permettra pas de s'enrichir, mais risque de « ruiner » le joueur.

17 LA MÉTHODE DE MONTE-CARLO

1. $M(x\,;y)$ est à l'intérieur du carré OIKJ $\Leftrightarrow 0 \leqslant x \leqslant 1$ et $0 \leqslant y \leqslant 1$.

2. a. L'aire du carré est $1 \times 1 = 1$ unité d'aire.

L'aire du quart de disque $\mathcal{D}$ est $\frac{1}{4} \times \pi \times 1^2 = \frac{\pi}{4}$.

Donc la proportion p est égale à $\frac{\frac{\pi}{4}}{1} = \frac{\pi}{4}$.

b. Le disque de centre $O(0\,;0)$ et de rayon 1 est l'ensemble des points M de coordonnées $(x\,;y)$ du plan tels que $OM \leqslant 1$.

Or $OM^2 = (x_M - x_O)^2 + (y_M - y_O)^2 = x^2 + y^2$, donc si $M(x\,;y)$ est un point du plan, M est à l'intérieur du disque de centre O et de rayon 1 $\Leftrightarrow OM \leqslant 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leqslant 1$.

Donc, si $M(x\,;y)$ est un point à l'intérieur du carré OIKJ :

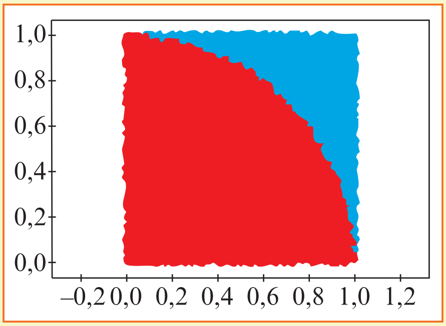
$$\mathbf{M \in \mathcal{D} \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leqslant 1.}$$

3.

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
x=np.random.random(10000)
y=np.random.random(10000)
n=0
for i in range(10000):
    if x[i]**2+y[i]**2<=1:
    plt.scatter(x[i],y[i],color='r')
    n=n+1
else : plt.scatter(x[i],y[i],color='b')
plt.axis('equal')
plt.show()
print(«La proportion de
points à l'intérieur de D est f
=»,n/10000)
```

L'instruct ion plt.axis('equal') permet d'obtenir un repère orthonormé.

4. L'exécution du script donne (par exemple) :



La proportion de points à l'intérieur de $\mathscr{D}$ est $f = 0{,}7\,847$.

Alors $f - \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0{,}7\,847 - \dfrac{1}{\sqrt{10\ 000}} = 0{,}7\,747$ et

$f + \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0{,}7\,847 + \dfrac{1}{\sqrt{10\ 000}} = 0{,}7\,947$.

On en déduit $0{,}7\,747 \leqslant \dfrac{\pi}{4} \leqslant 0{,}7\,947 \Leftrightarrow 3{,}0\,988 \leqslant \pi \leqslant 3{,}1\,788$.

C'est conforme à $\pi \approx$ 3,14 à 10^{-2} près.

Géométrie

10 Calcul vectoriel et produit scalaire

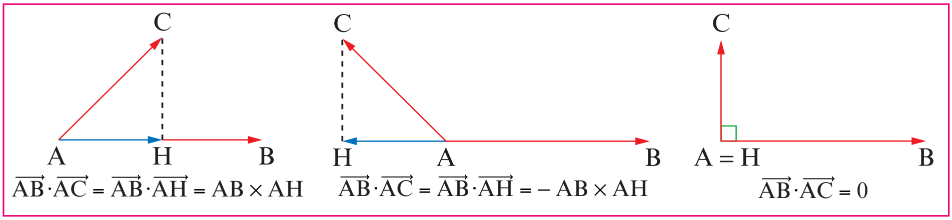
I PRODUIT SCALAIRE

1. Définitions du produit scalaire

DÉFINITION : Soient A, B, C trois points tels que $A \neq B$ et $A \neq C$.
Soit H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).
On appelle **produit scalaire** de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ le réel, noté $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, défini par :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{cases} AB \times AH \text{ si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ sont de même sens ;} \\ -AB \times AH \text{ si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ sont de sens contraire.} \end{cases}$$

On a l'égalité $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$.



THÉORÈME : Soient A, B et C trois points tels que $A \neq B$ et $A \neq C$, alors :

$$\boxed{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})}$$

DÉFINITION : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.

• Si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls, en notant $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ deux représentants respectivement de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on appelle produit scalaire de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ le réel, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$, défini par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}.$$

• Si l'un des deux vecteurs $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul, on pose $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

2. Orthogonalité

DÉFINITION : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan.
On dit que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si, en notant $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ deux représentants respectivement de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires.

De plus, on convient que **le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur du plan.**
On écrit alors $\vec{u} \perp \vec{v}$.

THÉORÈME : Deux vecteurs du plan sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul.

3. Expression du produit scalaire en repère orthonormal

DÉFINITION : Un repère du plan $(O;\vec{i}\,;\vec{j})$ est dit **orthonormal** si :
$\vec{i}\cdot\vec{j}=0$ et $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=1$.

PROPRIÉTÉ : Dans le plan muni du repère orthonormal $(O;\vec{i}\,;\vec{j})$, le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}(x\,;y)$ et $\vec{v}(x'\,;y')$ vaut :

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'}$$

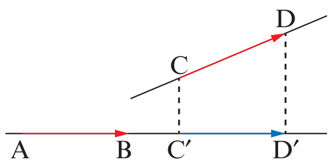
Remarque : $\vec{u}\cdot\vec{u}=x^2+y^2=\|\vec{u}\|^2$ et on retrouve la formule $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2}$.

4. Propriétés algébriques du produit scalaire

THÉORÈME : Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ des vecteurs du plan, et k un réel.

- $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$
- $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$ et $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w}=\vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}$.
- $(k\vec{u})\cdot\vec{v}=k\times(\vec{u}\cdot\vec{v})$ et $\vec{u}\cdot(k\vec{v})=k\times(\vec{u}\cdot\vec{v})$.

COROLLAIRE : Soient A, B, C, D quatre points tels que $A\neq B$ et $C\neq D$.
En notant C' et D' les projetés orthogonaux sur la droite (AB), alors :



$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{C'D}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD'}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{C'D'}.$$

II APPLICATIONS DU PRODUIT SCALAIRE

1. Dans un triangle quelconque

THÉORÈME D'AL-KASHI : Soit ABC un triangle quelconque du plan :

$$\boxed{BC^2=AB^2+AC^2-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}$$

Ou encore : $BC^2=AB^2+AC^2-2\times AB\times AC\times\cos(\widehat{BAC})$.

PROPRIÉTÉ : Soient A et B deux points du plan et I le milieu de [AB].
Pour tout point M du plan,

$$\boxed{\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}-\frac{AB^2}{4}}$$

2. Sur un cercle

PROPRIÉTÉ : Soient A et B deux points distincts du plan.
M appartient au cercle de diamètre [AB] si, et seulement si,

$$\boxed{\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0}$$

MÉTHODE 1

Déterminer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ à partir d'une figure

➜ Voir les exos 2, 11 et 14.

On se pose les questions suivantes :

Étape 1. Connaît-on le projeté orthogonal de B sur (AC) ou celui de C sur (AB) ?

Dans ce cas, on applique la définition avec le projeté orthogonal.

Étape 2. A-t-on des informations permettant de calculer la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$? Dans ce cas, on applique le théorème faisant intervenir le cosinus de l'angle.

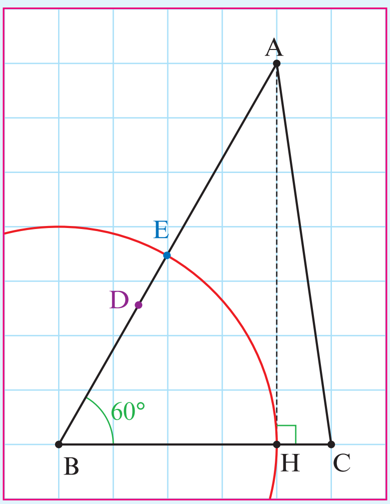
Étape 3. Si l'on ne dispose d'aucune de ces données, on peut tenter de décomposer chacun des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ de façon à faire apparaître des vecteurs orthogonaux.

Exo résolu

Dans la figure ci-contre, $\widehat{ABC} = 60°$ et H est le pied de la hauteur issue de A du triangle ABC.

On donne BC = 5, BH = 4 et AH = 7.

Le point E appartient au cercle de centre B passant par H et $\overrightarrow{BE} = 4\overrightarrow{DE}$.



1. Calculer $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

2. Calculer $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{BD}$.

CORRIGÉ

1. Étape 1. On connaît le projeté orthogonal de A sur (BC), c'est le point H.

Donc on utilise la définition :

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{BC} = BH \times BC = 4 \times 5 = 20.$$

Étape 3. On ne connaît ni le projeté orthogonal de B sur (AC) ni celui de C sur (AB) ni la mesure de $\widehat{BAC}$.
On décompose :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} &= (\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HB})\cdot(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HC})\\ &= \overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{HC}\\ &= AH^2+0+0-HB\times HC\\ &= 7^2-4\times 1=\mathbf{45}.\end{aligned}$$

2. Étape 2. $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{BD}=BH\times BD\times\cos(\widehat{HBD})$.

Or $\widehat{HBD}=\widehat{CBA}=60°$ et $BD=\frac{3}{4}BE=\frac{3}{4}BH=3$.

D'où $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{BD}=4\times 3\times\cos(60°)=12\times\frac{1}{2}=\mathbf{6}$.

MÉTHODE 2

Déterminer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$ à partir d'une figure

➜ **Voir les exos 1 et 15.**

Étape 1. Si l'on connaît les projetés orthogonaux C' et D' de C et de D sur la droite (AB), alors on utilise la relation :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{C'D'}.$$

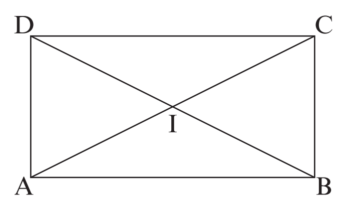
Étape 2. Si l'on veut déterminer un produit scalaire de la forme $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}$ ou $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}$, on applique les égalités $\overrightarrow{CA}=-\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$ pour l'exprimer en fonction de $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$, et on est ainsi ramené à la méthode 1.

Exo résolu

ABCD est un rectangle de centre O.

1. Exprimer $\overrightarrow{DO}\cdot\overrightarrow{AB}$ en fonction de AB.

2. Que vaut $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}$?



CORRIGÉ

1. Étape 1. Puisque le projeté orthogonal de D sur la droite (AB) est A et que celui de O sur (AB) est le milieu I de [AB], alors :

$$\overrightarrow{DO}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AB}=AI\times AB=\frac{AB^2}{2}.$$

2. Étape 2. Puisque le projeté de C sur la droite (AB) est B, alors :

$$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=-AB^2.$$

MÉTHODE 3

Reconnaître les ensembles de points

➜ Voir les exos 6, 10 et 11.

En travaillant par équivalence, on aboutit à l'une des situations de la colonne de gauche du tableau. Il faut ensuite savoir reconnaître l'ensemble des points M vérifiant cette condition.

Soient A, B, C trois points et $\vec{n}$ un vecteur non nul.

Ensemble des points M du plan tels que :	Nature
$AM = 0$	Le point A
$AM = r\,(r > 0)$	Le cercle de centre A et de rayon r
$AM = AB$	Le cercle de centre A passant par B
$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$	Le cercle de diamètre [AB]
$AM = BM$	La médiatrice du segment [AB]
$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$	La droite perpendiculaire à (BC) passant par A
$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$	La droite passant parA de vecteur normal $\vec{n}$

TESTER SES CONNAISSANCES

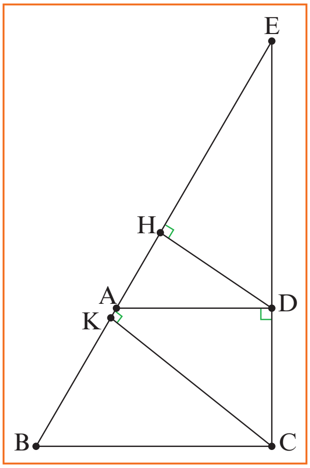
1 PROJECTIONS ORTHOGONALES

★ | 10 min | ▶ P. 305

ABCD est un trapèze rectangle de bases [BC] et [AD]. Les droites (AB) et (CD) se coupent en E. K est le pied de la hauteur issue de C du triangle BCE, et H est le pied de la hauteur issue de D du triangle ADE.

a. Justifier les égalités $\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{KE}\cdot\overrightarrow{AB}$

b. Déterminer tous les produits scalaires égaux à $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$.



On doit en trouver six.

2 AVEC DES ANGLES EN RADIANS

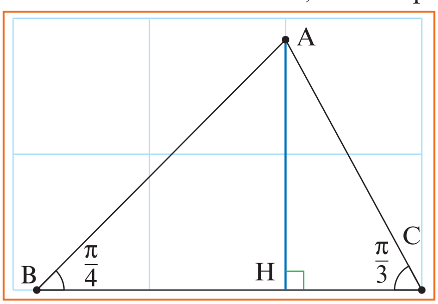
★★ | 20 min | ▶ P. 305

Les questions **1.** et **2.** sont indépendantes

1. Soit ABC un triangle rectangle isocèle en B et I le milieu de [AC].
On note a la longueur du côté AB. Exprimer en fonction de a :

a. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ **b.** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$ **c.** AC **d.** $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{IC}$

2. ABC est un triangle tel que $\widehat{ABC}=\frac{\pi}{4}$ et $\widehat{ACB}=\frac{\pi}{3}$.
H désignant le pied de la hauteur issue de A, on a de plus HC = 1.



a. Démontrer que $AH = BH = \sqrt{3}$.

$\tan\widehat{ACH} = \dots$

b. En déduire que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 3-\sqrt{3}$.

c. Démontrer que $\widehat{BAC} = \dfrac{5\pi}{12}$, puis déterminer la valeur exacte de $\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$.

3 ENSEMBLE DE POINTS ET COORDONNÉES | ★★ | 20 min | ▸ P. 307

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$.
On considère les points $A(5;-2)$, $B(-7;4)$, $M(x;y)$ et $N(3;y')$.
À quelle condition a-t-on :

a. $\overrightarrow{ON}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$

b. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OM} = 5$

c. ANB rectangle en A

d. MAO rectangle en O

e. $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 0$

f. ANB rectangle en N

Voir la méthode 3.

4 CALCULS EN REPÈRE ORTHONORMAL | ★★ | 20 min | ▸ P. 307

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$.
Les questions 1. et 2. sont indépendantes.

1. On considère les vecteurs $\vec{u}\left(-\dfrac{5}{2};0\right)$, $\vec{v}\left(\dfrac{1}{3};-\dfrac{3}{4}\right)$ et $\vec{w}\left(1;-\dfrac{4}{3}\right)$.

a. Calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$, $\vec{u}\cdot\vec{w}$, puis $\vec{v}\cdot\vec{w}$.

b. En déduire $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w}$ et $\overrightarrow{3u}\cdot(\vec{v}-\vec{w})$.

2. Déterminer, dans chaque cas, si le repère $(O;\vec{u};\vec{v})$ est orthogonal, orthonormal ou ni l'un ni l'autre.

a. $\vec{u}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2};-\dfrac{1}{2}\right)$ et $\vec{v}\left(-\dfrac{1}{2};-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

b. $\vec{u} = \dfrac{3}{5}\vec{i}+\dfrac{4}{5}\vec{j}$ et $\vec{v} = \dfrac{5}{3}\vec{i}+\dfrac{5}{4}\vec{j}$

c. $\vec{u} = \cos\theta\,\vec{i}+\sin\theta\,\vec{j}$ et $\vec{v} = -\sin\theta\,\vec{i}+\cos\theta\,\vec{j}$, θ désignant un réel quelconque.

Voir le cours I.2.

5 PRODUIT SCALAIRE EN PYTHON | ★ | 10 min | ▸ P. 308

Écrire en Python une fonction donnant la valeur du produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, dont les coordonnées en repère orthonormal sont $\vec{u}(x_1;y_1)$ et $\vec{v}(x_2;y_2)$.

6 ENSEMBLE DE POINTS | ★ | 10 min | ▸ P. 308

Soit A, B deux points du plan ; on note I le milieu de $[AB]$.

a. Démontrer que pour tout point M du plan :

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}.$$

b. Déterminer et dessiner l'ensemble des points M du plan tel que :

$$\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|=3AB.$$

7 AVEC DES NORMES | ★★ | 15 min | ▸ P. 309

1. En utilisant l'égalité $\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2=(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v})$ et les propriétés algébriques du produit scalaire, démontrer que :

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2-\left\|\vec{u}\right\|^2-\left\|\vec{v}\right\|^2\right).$$

2. Application : soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan vérifiant $\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|=9$, $\left\|\vec{u}\right\|=4$ et $\left\|\vec{v}\right\|=6$. Calculer :

a. $\vec{u}\cdot\vec{v}$ **b.** $\left\|\vec{u}-\vec{v}\right\|$ **c.** $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})$ **d.** $(\overrightarrow{3u}-\overrightarrow{2v})\cdot\vec{v}$

S'ENTRAÎNER

8 INDENTITÉ D'APOLLONIUS | ★ | 10 min | ▸ P. 310

L'objet de cet exercice est de démontrer le résultat suivant :

« la somme des carrés des diagonales d'un parallélogramme est égale à la somme des carrés de ses côtés ».

Soit donc $ABCD$ un parallélogramme.

a. Montrer que :

$$AC^2=AB^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+BC^2 \quad \text{et} \quad BD^2=BC^2+2\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD}+CD^2.$$

b. En déduire l'égalité d'Appolonius.

9 RELATION D'EULER | ★★ | 15 min | ▸ P. 310

a. Soit ABC un triangle.

Démontrer que, pour tout point M du plan :

$$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{AB}=0.$$

On pourra décomposer les vecteurs $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{CM}$ en $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AM}$.

b. Soit ABC un triangle. On veut démontrer que ses hauteurs sont concourantes. Soit H le point d'intersection de la hauteur issue de A et de la hauteur issue de B du triangle.

À l'aide de la relation d'Euler, démontrer que $\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ et conclure.

10 ENSEMBLES DE POINTS

★★ | 30 min | ▸ P. 310

Dans tout cet exercice, A et B sont deux points distincts, et I est le milieu du segment $[AB]$.

1. Démonstration de cours :

a. Soit M un point quelconque du plan. Démontrer que :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}.$$

On remarquera que $\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} = 0$.

b. En déduire la nature de l'ensemble des points M du plan tels que :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0.$$

2. On suppose dans cette quesiton que $AB = 1$.

Soit $(\mathscr{C})$ un cercle de centre I et de rayon 2.

Démontrer que, pour tout point P du cercle, le produit scalaire $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ est constant, et donner sa valeur.

3. On suppose dans cette question que $AB = 6$.

a. Déterminer l'ensemble $\mathscr{C}$ des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 7$.

On pourra montrer que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 7$ si, et seulement si, $MI = 4$.

b. Déterminer de même l'ensemble $\mathscr{F}$ des points M du plan tels que :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -18.$$

c. Déterminer enfin l'ensemble $\mathscr{G}$ des points M du plan tels que :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -9.$$

11 PROBLÈME DE GÉOMÉTRIE

★★ | 30 min | ▸ P. 312

Soit ABC un triangle et I le milieu de $[BC]$.

1. Construire les points D et E extérieurs au triangle et tels que les triangles ABD et ACE soient rectangles isocèles en A.

2. Démontrer que les angles $\widehat{DAC}$ et $\widehat{EAB}$ sont égaux.

3. a. Démontrer que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

b. Établir que :

$$\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DA}).$$

4. a. Démontrer que $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DA} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE}$.

b. En déduire que les droites (AI) et (DE) sont perpendiculaires.

EXOS & SUJETS

12 THÉORÈME DE LA MÉDIANE

★★ | 30 min | ▶ P. 313

Dans tout cet exercice, A et B sont deux points du plan, et I le milieu du segment [AB].

1. En décomposant les vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ en $\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}$, démontrer que :

$$\mathrm{MA}^2+\mathrm{MB}^2=2\mathrm{MI}^2+\frac{\mathrm{AB}^2}{2}.$$

2. On suppose de plus que $\mathrm{AB}=4$. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $\mathrm{MA}^2+\mathrm{MB}^2=k$, pour les valeurs de k suivantes :

a. $k=10$ **b.** $k=8$ **c.** $k=5$

PRÉPARER UN CONTRÔLE

13 PRODUIT SCALAIRE ET PYTHON

★★ | 15 min | ▶ P. 313

a. Le plan étant muni d'un repère orthonormé, calculer $\widehat{\mathrm{BAC}}$ sachant que A(1 ; 2), B (0 ;1) et C(–1 ; 2)

b. Écrire en Python une fonction donnant l'angle $\widehat{\mathrm{BAC}}$ à partir des coordonnées des points qui seront définis par des listes (la fonction du module math, acos correspond à la touche $\cos^{-1}$ de la calculatrice).

14 FORMULE D'AL-KASCHI

★★ | 20 min | ▶ P. 314

Soit ABC un triangle. On note $a=\mathrm{BC}$, $b=\mathrm{AC}$ et $c=\mathrm{AB}$.

1. Question de cours :

a. À l'aide de la relation de Chasles $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}$, démontrer que :

$$\mathrm{BC}^2=\mathrm{BA}^2+\mathrm{AC}^2+2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC}.$$

b. En déduire la formule d'Al-Kaschi : $a^2=b^2+c^2-2bc\times\cos\widehat{\mathrm{BAC}}$.

2. Soit ABC un triangle vérifiant $\mathrm{AB}=5$ cm, $\widehat{\mathrm{BAC}}=30°$ et $\mathrm{AC}=4$ cm. Après avoir construit ce triangle, calculer la longueur du côté [BC].

15 PROBLÈME

★★ | 25 min | ▶ P. 315

Soit ABC un triangle, et H le pied de la hauteur issue de A.

Le but de cet exercice est de démontrer l'équivalence suivante :

« ABC est rectangle en A si, et seulement si, $\mathrm{AB}^2=\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{BC}$. »

1. a. On suppose que ABC est rectangle en A. Montrer que $\mathrm{AB}^2=\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{AB}$.

b. Montrer ensuite que $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{HB}$, puis conclure.

2. Réciproquement : on suppose que $\mathrm{AB}^2=\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{BC}$.

En décomposant le vecteur $\overrightarrow{AC}$ en $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$, calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$, puis conclure.

ALLER PLUS LOIN

16 DROITE D'EULER
★★ 25 min ▶ P. 315

Soit ABC un triangle quelconque et on note G le point de concours des médianes (on rappelle que G se trouve sur une médiane donnée aux $\frac{2}{3}$ en partant du sommet).

1. On note I le milieu du segment [BC].

a. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ en fonction de $\overrightarrow{AI}$.

b. Démontrer que $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

2. On appelle Γ le cercle circonscrit au triangle, O son centre (on rappelle que O est le point d'intersection des médiatrices de [AB], [BC] et [AC]) et soit H le point du plan défini par $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$.

a. Démontrer $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OI}$, puis exprimer $\overrightarrow{AH}$ en fonction de $\overrightarrow{OI}$.

b. En déduire que $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0$.

c. En admettant que l'on a aussi $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{CA}=0$, que peut-on en déduire pour H ?

3. Démontrer que $\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}$. Qu'en déduit-on ?

17 LOI DES SINUS
★★★ 25 min ▶ P. 316

Soit ABC un triangle non plat.
On note $AB=c$, $BC=a$ et $AC=b$.

1. Soit H le pied de la hauteur issue de A du triangle ABC.

a. Exprimer la longueur AH en fonction de l'angle $\widehat{B}$, puis de l'angle $\widehat{C}$.

b. En déduire que :

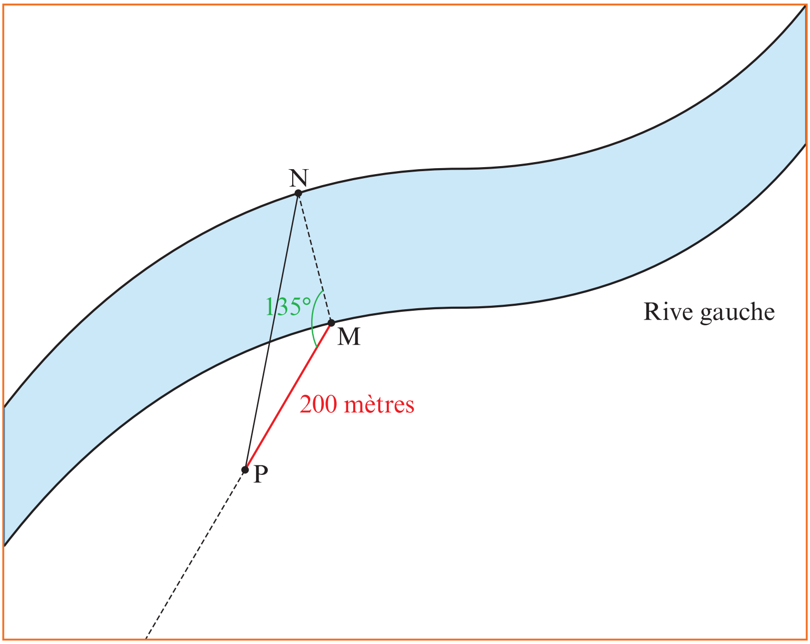
$$\frac{b}{\sin\widehat{B}}=\frac{c}{\sin\widehat{C}}.$$

2. Soit K le pied de la hauteur issue de B du triangle ABC.
En procédant de même, établir l'égalité $\frac{a}{\sin\widehat{A}}=\frac{c}{\sin\widehat{C}}$.

La formule $\frac{a}{\sin\widehat{A}}=\frac{b}{\sin\widehat{B}}=\frac{c}{\sin\widehat{C}}$ s'appelle la loi des sinus.

3. Application

Un homme, situé sur la rive gauche d'un fleuve, souhaite mesurer la distance entre deux arbres (M et N) situés en bordure du fleuve. Pour cela, il dispose d'une boussole.
Initialement placé en M, il mesure un angle de 135° à partir du point M puis avance selon cette direction de 200 mètres.
Il arrive ainsi au point P, d'où il mesure que $\widehat{MPN}=20°$.



À partir de ces données, déterminer la valeur exacte de la distance MN, puis en donner une valeur approchée au centimètre près.

18 FORMULE DE CAUCHY-SCHWARZ | ★★★ | 20 min | ▸ P. 317

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.

a. Montrer que, pour tout réel t :

$$\|t\vec{u}+\vec{v}\|^2 = t^2\|\vec{u}\|^2 + 2t(\vec{u}\cdot\vec{v}) + \|\vec{v}\|^2 .$$

b. Pourquoi peut-on affirmer que le polynôme du second degré
$P : t \to t^2\|\vec{u}\|^2 + 2t\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$ admet un discriminant Δ négatif ou nul ?
Quel est le signe, sur $\mathbb{R}$, de $P(t)$?

c. Montrer alors que :

$$(\vec{u}\cdot\vec{v})^2 \leqslant \|\vec{u}\|^2 \times \|\vec{v}\|^2 .$$

d. En déduire la formule de Cauchy-Schwarz, valable pour tous les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$$|(\vec{u}\cdot\vec{v})| \leqslant \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|.$$

CORRIGÉS

1 PROJECTIONS ORTHOGONALES

a. Le projeté orthogonal de A sur (CE) est D donc $\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{DB}$.

Le projeté orthogonal de B sur (CE) est C donc $\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{AC}$.

Les projetés orthogonaux de A et de B sur (CE) sont respectivement D et C donc $\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{DC}$.

Le projeté orthogonal de C sur (AB) est K, donc $\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{KE}\cdot\overrightarrow{AB}$.

Finalement :

$$\overrightarrow{\mathbf{CE}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{AB}}=\overrightarrow{\mathbf{CE}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{DC}}=\overrightarrow{\mathbf{CE}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{AC}}=\overrightarrow{\mathbf{CE}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{DB}}=\overrightarrow{\mathbf{KE}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{AB}}.$$

b. Par projection orthogonale sur (AB), on obtient :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{KH}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CH}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{KD}.$$

Par projection orthogonale sur (CD), on obtient :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{CD}.$$

Finalement :

$$\overrightarrow{\mathbf{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{CD}}=\overrightarrow{\mathbf{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{KH}}=\overrightarrow{\mathbf{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{CH}}=\overrightarrow{\mathbf{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{KD}}=\overrightarrow{\mathbf{DC}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{CD}}=\overrightarrow{\mathbf{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{CD}}=\overrightarrow{\mathbf{DB}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{CD}}.$$

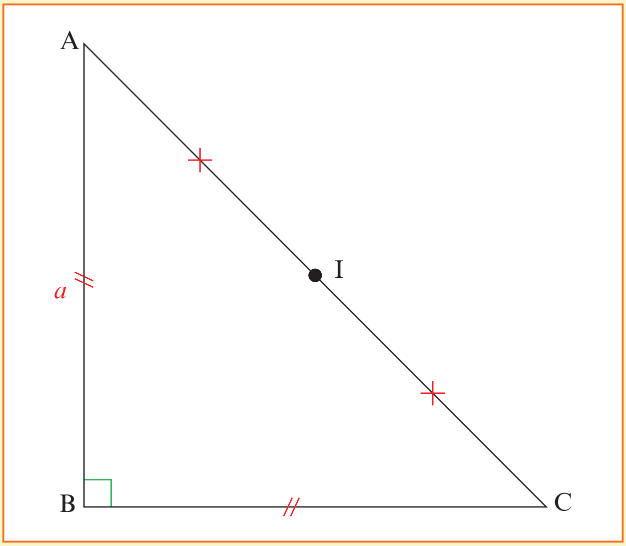
2 AVEC DES ANGLES EN RADIANS

1. a. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}$, car B est le projeté orthogonal de C sur (AB).
Donc $\overrightarrow{\mathbf{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{AC}}=\mathbf{AB}^2=\boldsymbol{a}^2$**.**

b. ABC est rectangle en B donc :

$$\overrightarrow{\mathbf{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{BC}}=\mathbf{0}.$$

c. $AC^2=AB^2+BC^2=a^2+a^2=2a^2$, car ABC est rectangle en B.
Donc $\mathbf{AC}=\sqrt{\mathbf{2}}\times\boldsymbol{a}$.



d. ABC étant isocèle en B, la médiane (BI) est aussi la hauteur issue de B du triangle, d'où $(BI) \perp (AC)$,
Alors :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{IC} &= \overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{IC} = -IC^2\\ &= -\left(\frac{AC}{2}\right)^2 = -\left(\frac{\sqrt{2}a}{2}\right)^2\\ &= -\frac{2a^2}{4} = -\boldsymbol{\frac{a^2}{2}}.\end{aligned}$$

2. a. • $\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjascent}} = \frac{AH}{HC}$.

Or, $\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$.

D'où $\frac{AH}{HC} = \sqrt{3}$, soit $\frac{AH}{1} = \sqrt{3}$ et $AH = \sqrt{3}$.

• $\widehat{ABH} = \frac{\pi}{4}$ et $\widehat{BHA} = \frac{\pi}{2}$, donc $\widehat{BAH} = \pi - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$.
Comme $\widehat{ABH} = \widehat{BAH}$, le triangle ABH est isocèle en H.
Donc $\mathbf{BH = HA = \sqrt{3}}$**.**

b.
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= \left(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC}\right)\\ &= AH^2 + \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HC} + \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC}\\ &= \sqrt{3}^2 + 0 + 0 - HB \times HC \text{ (car } \overrightarrow{HB} \text{ et } \overrightarrow{HC} \text{ sont de sens contraire)}\\ &= 3 - \sqrt{3} \times 1.\end{aligned}$$

$\boldsymbol{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3 - \sqrt{3}}$.

c. • $\widehat{BAC} = \pi - \widehat{ABC} - \widehat{ACB} =$

$$= \pi - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} = \frac{12\pi - 3\pi - 4\pi}{12} = \frac{5\pi}{12}.$$

• $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$, avec $AB = \sqrt{AH^2 + HB^2} = \sqrt{3+3} = \sqrt{6}$
et $AC = \sqrt{AH^2 + HC^2} = \sqrt{3+1} = 2$ (théorème de Pythagore dans ABH et ACH rectangles en H).
• D'après **b.**,

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3 - \sqrt{3} = \sqrt{6} \times 2 \times \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right).$$

Donc $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{3 - \sqrt{3}}{2\sqrt{6}} = \frac{(3 - \sqrt{3}) \times \sqrt{6}}{2\sqrt{6} \times \sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6} - 3\sqrt{2}}{12}$.

$\boldsymbol{\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}}$.

3 ENSEMBLE DE POINTS ET COORDONNEES

a. $\overrightarrow{ON}(3\,;y')$ et $\overrightarrow{AB}(-12\,;6)$ donc :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{ON}\cdot\overrightarrow{AB}=0 &\Leftrightarrow 3\times(-12)+y'\times 6=0\\ &\Leftrightarrow 6y'=+36\end{aligned}$$

$\boldsymbol{\overrightarrow{ON}\cdot\overrightarrow{AB}=0\Leftrightarrow y'=+6}$ (équation de droite).

b. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OM}=5\Leftrightarrow -12\times x+6\times y=0$

$\boldsymbol{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OM}=5\Leftrightarrow -12x+6y-5=0}$ (équation de droite).

c. ANB est rectangle en A $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AN}$

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AN}=0 \text{ avec } \overrightarrow{AN}(-2\,;y'+2)\\ &\Leftrightarrow -12\times(-2)+6\times(y'+2)=0\\ &\Leftrightarrow y'+2=\frac{-24}{6}\\ &\Leftrightarrow y'=-4-2\\ &\Leftrightarrow \boldsymbol{y'=-6} \text{ (équation de droite).}\end{aligned}$$

d. MAO est rectangle en O $\Leftrightarrow \overrightarrow{OM}\perp\overrightarrow{OA}$

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow \overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OA}=0\\ &\Leftrightarrow x\times 5+y\times(-2)=0\\ &\Leftrightarrow 5x-2y=0\\ &\Leftrightarrow \boldsymbol{y=\frac{5}{2}x} \text{ (équation de droite).}\end{aligned}$$

e.
$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0 &\Leftrightarrow (5-x)\times(-7-x)+(-2-y)\times(4-y)=0\\ &\Leftrightarrow -35+2x+x^2-8-2y+y^2=0.\\ &\Leftrightarrow \boldsymbol{x^2+2x+y^2-2y-43=0} \text{ (équation de cercle).}\end{aligned}$$

f. ANB est rectangle en N $\Leftrightarrow \overrightarrow{NA}\cdot\overrightarrow{NB}=0$

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow (5-3)\times(-7-3)+(-2-y')\times(4-y')\\ &\Leftrightarrow -20-8-2y'+y'^2=0\\ &\Leftrightarrow \boldsymbol{y'^2-2y'-28=0}.\end{aligned}$$

$\Delta=4-4\times(-28)=116=\left(2\sqrt{29}\right)^2$, donc les racines sont :

$$y'_1=\frac{2-2\sqrt{29}}{2}=1-\sqrt{29} \text{ et } y'_2=1+\sqrt{29}.$$

ANB est rectangle en N si, et seulement si, $\boldsymbol{y'=1-\sqrt{29}}$ ou $\boldsymbol{y'=1+\sqrt{29}}$.

4 CALCULS EN REPÈRE ORTHONORMAL

1. a. • $\vec{u}\cdot\vec{v}=-\frac{5}{2}\times\frac{1}{3}+0\times\left(-\frac{3}{4}\right)=-\frac{5}{6}+0=\boldsymbol{-\frac{5}{6}}$.

• $\vec{u}\cdot\vec{w}=-\frac{5}{2}\times 1+0\times\left(-\frac{4}{3}\right)=\boldsymbol{-\frac{5}{2}}$.

• $\vec{v}\cdot\vec{w}=\frac{1}{3}\times 1+\left(-\frac{3}{4}\right)\times\left(-\frac{4}{3}\right)=\frac{1}{3}+1=\boldsymbol{\frac{4}{3}}$.

b. • $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w}=\vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}$

$$=-\frac{5}{2}+\frac{4}{3}=\frac{-15+8}{6}=\boldsymbol{-\frac{7}{6}}.$$

- $3\vec{u}\cdot(\vec{v}-\vec{w}) = 3(\vec{u}\cdot\vec{v}-\vec{u}\cdot\vec{w})$

$$= 3\left(-\frac{5}{6}-\frac{4}{3}\right) = -\frac{5}{2}-4 = -\mathbf{\frac{13}{2}}.$$

2. a. • $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{\sqrt{3}}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4} = 0,$

donc **$(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$ est orthogonal.**

- $\|\vec{u}\|^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}+\frac{1}{4} = 1,$ et $\|\vec{v}\|^2 = \frac{1}{4}+\frac{3}{4} = \mathbf{1},$

donc **$(O\,;\vec{u}\,;\vec{v}$ est orthonormal.**

b. • $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{3}{5}\times\frac{5}{3}+\frac{4}{5}\times\frac{5}{4} = 1+1 = 2 \neq 0,$

donc **$(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$ n'est pas orthogonal.**

À fortiori, **il n'est pas non plus orthonormal.**

c. • $\vec{u}\cdot\vec{v} = \cos\theta\times(-\sin\theta)+\sin\theta\times\cos\theta = -\sin\theta\times\cos\theta+\sin\theta\times\cos\theta = 0,$

donc **$(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$ est orthogonal.**

- $\|\vec{u}\|^2 = (\cos\theta)^2+(\sin\theta)^2 = 1$

$\|\vec{v}\|^2 = (-\sin\theta)^2+(\cos\theta)^2 = (\sin\theta)^2+(\cos\theta)^2 = 1,$

donc **$(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$ est orthonormal.**

5 PRODUIT SCALAIRE EN PYTHON

```
def produit_scalaire(vect1,vect2):
    resultat=0
    for i in range(len(vect1)) :
        resultat+=vect1[i]*vect2[i]
    return resultat
```

```
# Test de la fonction produit_scalaire
u=[2,1]
v=[1,-1]
print('le produit scalaire du vecteur de coordonnées ',u,' et du vecteur de coordonnées ',v, ' vaut ',produit_scalaire(u,v))
```

6 ENSEMBLE DE POINTS

a. Soit M un point quelconque du plan :

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})+(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}) = 2\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}.$$

I étant le milieu de [AB], les vecteurs $\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{IB}$ sont opposés, donc $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$.

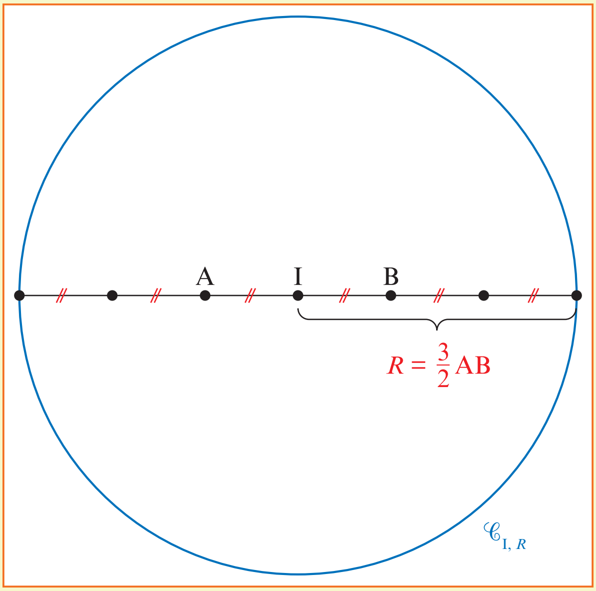
Donc $\mathbf{\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}}$.

b. Soit M un point du plan,

$\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\| = 3AB \Leftrightarrow \|2\overrightarrow{MI}\| = 3AB \Leftrightarrow 2\times\|\overrightarrow{MI}\| = 3AB$

$\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\| = 3AB \Leftrightarrow 2\times MI = 3AB \Leftrightarrow MI = \frac{3}{2}AB\,.$

Donc l'ensemble des points M du plan tels que $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\| = 3AB$ est le cercle de centre I et de rayon $\frac{3}{2}AB$.



7 AVEC DES NORMES

1. On a :

$$\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2 = (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{u}+\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{u}+\vec{v}\cdot\vec{v} = \left\|\vec{u}\right\|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v}+\left\|\vec{v}\right\|^2$$

Donc :

$$\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2 - \left\|\vec{u}\right\|^2 - \left\|\vec{v}\right\|^2 = 2\vec{u}\cdot\vec{v}$$

D'où $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2 - \left\|\vec{u}\right\|^2 - \left\|\vec{v}\right\|^2\right)$.

2. a. $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2 - \left\|\vec{u}\right\|^2 - \left\|\vec{v}\right\|^2\right) = \frac{1}{2}(9^2-4^2-6^2) = \mathbf{\frac{29}{2}}$.

b. En appliquant la formule de la question en remplaçant $\vec{v}$ par $-\vec{v}$, on trouve

$\vec{u}\cdot(-\vec{v}) = \frac{1}{2}\left(\left\|\vec{u}-\vec{v}\right\|^2 - \left\|\vec{u}\right\|^2 - \left\|\vec{v}\right\|^2\right)$ car $\left\|-\vec{v}\right\| = \left\|\vec{v}\right\|$,

Puisque $\vec{u}\cdot(-\vec{v}) = -\vec{u}\cdot\vec{v} = -\frac{29}{2}$, alors $-\frac{29}{2} = \frac{1}{2}\left(\left\|\vec{u}-\vec{v}\right\|^2 - 4^2 - 6^2\right)$.

D'où $\left\|\vec{u}-\vec{v}\right\|^2 = 6^2+4^2-29 = 23$.

Donc $\left\|\vec{u}-\vec{v}\right\| = \mathbf{\sqrt{23}}$ (car une norme est toujours positive).

c. $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{u}+\vec{v}\cdot\vec{u}-\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{v}$

$= \left\|\vec{u}\right\|^2 - \left\|\vec{v}\right\|^2 = 16-36 = \mathbf{-20}$.

d. $(3\vec{u}-2\vec{v})\cdot\vec{v} = 3\vec{u}\cdot\vec{v} - 2\left\|\vec{v}\right\|^2$

$= 3\times\frac{29}{2} - 2\times 36 = -\frac{57}{2} = \mathbf{-28{,}5}$.

CORRIGÉS

8 INDENTITÉ D'APOLLONIUS

a. Il suffit d'appliquer le théorème D'Al-Kashi :

$$AC^2 = BA^2 + BC^2 - 2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = AB^2 + BC^2 + 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}.$$

Sinon, on peut démontrer directement cette formule en utilisant la relation de Chasles et les propriétés algébriques du produit scalaire :

$$AC^2 = \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC}$$
$$= (\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})$$
$$\mathbf{AC^2 = AB^2 + 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} + BC^2}.$$

De manière analogue, on montre que :

$$\mathbf{BD^2 = BC^2 + 2\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD} + CD^2}.$$

b. $AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} + BC^2 + CD^2 + 2\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD}$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont égaux, donc $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB}$ et :

$$2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{BC}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}) = 2\overrightarrow{BC}\cdot\vec{0} = 0.$$

Et comme BC = AD, on a finalement : $\mathbf{AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + AD^2 + CD^2}$.

9 RELATION D'EULER

a. $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{AB}$

$$= \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC} + (\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AM})\cdot\overrightarrow{CA} + (\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AM})\cdot\overrightarrow{AB}$$
$$= \overrightarrow{AM}\cdot(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}.$$

Or, $(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}) + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BB} = \vec{0}$, et

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CA}\cdot(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{CA}\cdot\vec{0} = 0.$

Donc : $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM}\cdot\vec{0} = 0$

$\mathbf{\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{AB} = 0.}$

b. D'après la relation d'Euler appliquée au point H :

$$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AB} = 0.$$

Or, par définition de H, $\overrightarrow{HA}\perp\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{HB}\perp\overrightarrow{AC}$, ainsi :

$$0 + 0 + \overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AB} = 0.$$

D'où $(\mathbf{CH})\perp(\mathbf{AB})$.

Donc H appartient à la hauteur issue de C du triangle ABC.

Les hauteurs du triangle sont donc concourantes en H.

10 ENSEMBLES DE POINTS

1. a. $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})\cdot(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})$

$$= MI^2 + \overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB}$$
$$= MI^2 + \overrightarrow{MI}\cdot(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}) - IA\times IB$$

car $\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{IB}$ sont colinéaires et de sens contraire.

Comme I est le milieu de $[\text{AB}]$, $\overrightarrow{\text{IA}}+\overrightarrow{\text{IB}}=\vec{0}$ et $\text{IA}=\text{IB}=\dfrac{1}{2}\text{AB}$. D'où :

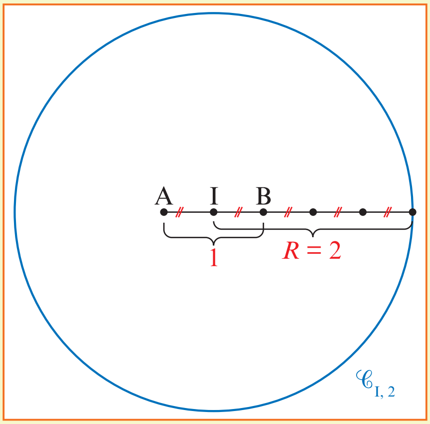
$$\overrightarrow{\text{MA}}\cdot\overrightarrow{\text{MB}}=\text{MI}^2+\overrightarrow{\text{MI}}\cdot\vec{0}-\frac{\text{AB}}{2}\times\frac{\text{AB}}{2}=\text{MI}^2+0-\frac{\text{AB}^2}{4}.$$

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\text{MA}}\cdot\overrightarrow{\text{MB}}=\text{MI}^2-\frac{\text{AB}^2}{4}}.$$

b. $\overrightarrow{\text{MA}}\cdot\overrightarrow{\text{MB}}=0\Leftrightarrow\text{MI}^2-\dfrac{\text{AB}^2}{4}=0\Leftrightarrow\text{MI}^2=\dfrac{\text{AB}^2}{4}\Leftrightarrow\text{MI}=\dfrac{1}{2}\text{AB}$.

M décrit alors le cercle de centre I et de rayon $\boldsymbol{\dfrac{\text{AB}}{2}}$, c'est-à-dire le cercle de diamètre [AB].

2.



Soit P un point du cercle.

$$\overrightarrow{\text{PA}}\cdot\overrightarrow{\text{PB}}=\text{PI}^2-\frac{\text{AB}^2}{4}\quad\text{(d'après le résultat du a.)}$$

$$=2^2-\frac{1^2}{4}=\frac{15}{4},\quad\text{donc :}$$

pour tout point P du cercle, le produit scalaire $\boldsymbol{\overrightarrow{\text{PA}}\cdot\overrightarrow{\text{PB}}}$ est constant et égal à $\boldsymbol{\dfrac{15}{4}}$.

3. a. $\overrightarrow{\text{MA}}\cdot\overrightarrow{\text{MB}}=7\Leftrightarrow\text{MI}^2-\dfrac{\text{AB}^2}{4}=7$ d'après **1. a.**

$$\Leftrightarrow\text{MI}^2=7+\frac{36}{4}\Leftrightarrow\text{MI}=16$$

$$\Leftrightarrow\text{MI}=4\ \text{(car une distance est toujours positive).}$$

L'ensemble $\mathscr{E}$ des points M tels que $\boldsymbol{\overrightarrow{\text{MA}}\cdot\overrightarrow{\text{MB}}=7}$ est donc le cercle de centre I et de rayon 4.

b. $\overrightarrow{\text{MA}}\cdot\overrightarrow{\text{MB}}=-18\Leftrightarrow\text{MI}^2=-18+\dfrac{36}{4}\Leftrightarrow\text{MI}^2=-9$, ce qui est impossible.

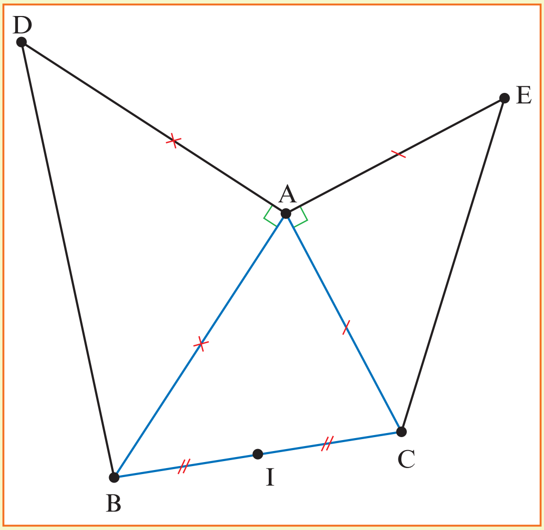
$\mathscr{F}$ est donc l'ensemble vide.

c. $\overrightarrow{\text{MA}}\cdot\overrightarrow{\text{MB}}=-9\Leftrightarrow\text{MI}^2=-9+\dfrac{36}{4}\Leftrightarrow\text{MI}=0\Leftrightarrow\text{M}=\text{I}$.

Donc $\mathscr{G}$ est réduit au point I.

11 PROBLÈME DE GÉOMÉTRIE

1.



2. $\widehat{DAC} = \widehat{DAB} + \widehat{BAC} = \frac{\pi}{2} + \widehat{BAC}$;

$\widehat{BAE} = \widehat{BAC} + \widehat{CAE} = \widehat{BAC} + \frac{\pi}{2}$.

Donc $\mathbf{\widehat{DAC} = \widehat{BAE}}$.

3. a. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}) + (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC})$

$= 2\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}$.

$\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$ car I est le milieu de [BC], d'où $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI}$; $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$

b. D'où $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) \cdot \overrightarrow{DE}$.

Or, $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE}$ donc :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{DE} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE}) \\
&= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AE}) \\
&= \frac{1}{2}(0 + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} + 0)
\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE})}.$$

4. a. Or, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DA} = -\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = -AC \times AD \times \cos(\widehat{CAD})$,

et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} = AB \times AE \times \cos(\widehat{BAE})$.

Comme $AD = AB$, $AC = AE$ et $\widehat{BAE} = \widehat{CAD}$:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DA} &= -AC \times AD \times \cos(\widehat{CAD}) \\
&= -AE \times AB \times \cos(\widehat{BAE}) = -\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AE}.
\end{aligned}$$

b. Donc $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} = 0$ et d'après **3. b.** $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{DE} = \frac{1}{2} \times 0 = 0$.

Donc les droites (AI) et (DE) sont perpendiculaires.

12 THÉORÈME DE LA MÉDIANE

1. $$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 &= \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MB} \\ &= (\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})\cdot(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}) + (\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})\cdot(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}) \\ &= MI^2 + 2\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{MI} + IA^2 + MI^2 + 2\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IB} + IB^2. \end{aligned}$$

$IA = IB = \dfrac{AB}{2}$ d'où :

$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + 2\overrightarrow{MI}\cdot(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}) + \left(\dfrac{AB}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{AB}{2}\right)^2.$

I est le milieu de $[AB]$, donc $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB} = \vec{0}$ d'où :

$$\mathbf{MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}}.$$

2. a. $$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 = 10 &\Leftrightarrow 2MI^2 + \frac{AB^2}{2} = 10 \left(\text{avec } \frac{AB^2}{2} = \frac{4^2}{2} = 8\right) \\ &\Leftrightarrow 2MI^2 = 10 - 8 \\ &\Leftrightarrow MI^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow IM = 1. \end{aligned}$$

L'ensemble cherché est donc le cercle de centre I de rayon 1.

b. $$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 = 8 &\Leftrightarrow 2MI^2 + \frac{AB^2}{2} = 8 \\ &\Leftrightarrow 2MI^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow MI^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow IM = 0 \\ &\Leftrightarrow M = I \end{aligned}$$

L'ensemble cherché est le point I.

c. $$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 = 5 &\Leftrightarrow 2MI^2 + \frac{AB^2}{2} = 5 \Leftrightarrow 2MI^2 = 5 - 8 \\ &\Leftrightarrow MI^2 = -\frac{3}{2} \quad \text{(impossible)}. \end{aligned}$$

L'ensemble cherché est l'ensemble vide.

13 PRODUIT SCALAIRE ET PYTHON

a. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 0-1 \\ 1-2 \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, donc $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$.

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -1-1 \\ 2-2 \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc $\left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \sqrt{(-2)^2 + (0)^2} = 2$.

De plus, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = (-1)\times(-2) + (-1)\times 0 = 2$.

$$\begin{aligned} \text{Donc } \cos(\widehat{BAC}) &= \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\times\left\|\overrightarrow{AC}\right\|} \\ &= \frac{2}{\sqrt{2}\times 2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

Donc $\mathbf{\widehat{BAC} = \dfrac{\pi}{4}}$.

b.

```
from math import *
def angle_BAC(A,B,C):
    ABcarre=0
    ACcarre=0
    pdt_scalaire=0
    for i in range(len(A)):
        ABcarre+=(B[i]-A[i])**2
        ACcarre+=(C[i]-A[i])**2
        pdt_scalaire+=(B[i]-A[i])*(C[i]-A[i])
    return acos(pdt_scalaire/sqrt(ABcarre*ACcarre))
```

```
# Test de la fonction angle_BAC
A=[1,2]
B=[0,1]
C=[-1,2]
print('L angle BAC vaut ',angle_BAC(A,B,C))
```

14 FORMULE D'AL-KASCHI

1. a. $BC^2 = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$

$\mathbf{BC^2 = BA^2 + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} + AC^2}$.

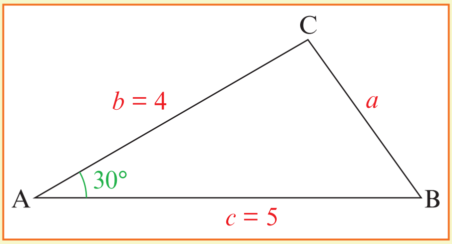
b. On en déduit que $a^2 = c^2 + b^2 + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Or $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$

$= -c \times b \times \cos(\widehat{BAC})$.

D'où $\mathbf{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\widehat{BAC})}$.

2.



D'après la formule d'Al-Kaschi :

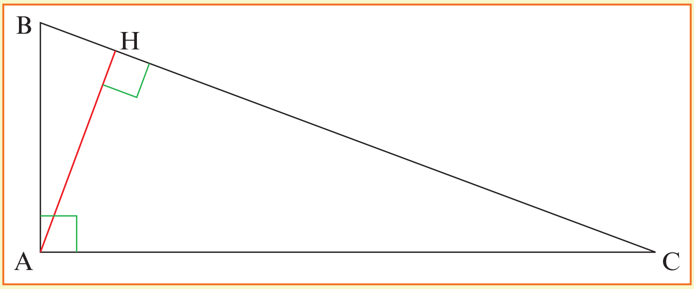
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\widehat{BAC})$$
$$= 16 + 25 - 2 \times 4 \times 5 \times \cos(30°)$$
$$= 41 - 40 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 41 - 20\sqrt{3} \qquad \text{(positif)}.$$

a désigne une longueur donc $a = +\sqrt{41 - 20\sqrt{3}}$ d'où :

$$\mathbf{BC = \sqrt{41 - 20\sqrt{3}} \approx 2{,}52\ cm} \text{ (à 0,01 près)}.$$

15 PROBLÈME

1. ABC est rectangle en A.



a. $AB^2 = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})\cdot\overrightarrow{AB}$

$= \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{AB}$

ABC étant rectangle en A, $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ d'où :

$$\mathbf{AB^2 = \overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{AB}.}$$

b. $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}\cdot(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HB})=\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{HB}.$

Or, $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{AH}=0$ par définition du point H, donc :

$$\mathbf{\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{HB}.}$$

Finalement : $AB^2=\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{HB}=(-\overrightarrow{BC})\cdot(-\overrightarrow{BH})$

$$\mathbf{AB^2=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BH}.}$$

2. On suppose que $AB^2=\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}) = AB^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$

$=\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$ d'après **1.b.**

$=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BH})\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}.$

H est le projeté orthogonal de A sur (BC), donc $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0.$

Donc $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$ et **ABC est rectangle en A**.

16 DROITE D'EULER

1. a. I est milieu de [BC] signifie que $\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$ donc :

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB})+(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IC})=2\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=2\overrightarrow{AI}.$$

b. $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GA}+(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB})+(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AC})$

$=3\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=-3\overrightarrow{AG}+2\overrightarrow{AI}.$

Or G est le point de concours des médianes du triangle ABC, ainsi $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$ et on en déduit $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=-2\overrightarrow{AI}+2\overrightarrow{AI}=\vec{0}$.

2. a. I est milieu de [BC] signifie que $\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$ donc :

$$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=(\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IB})+(\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IC})=2\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=2\overrightarrow{OI}.$$

De plus, $\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OH}$

$=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$

$=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OI}$

b. $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ car (OI) est la médiatrice de [BC].

Donc la droite (AH) est la hauteur issue de A du triangle ABC.

c. En admettant que $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{CA}=0$, on peut en déduire que AH est la hauteur issue de B du triangle ABC, donc que H est l'orthocentre du triangle ABC.

H est le point de concours des hauteurs du triangle ABC.

3. $$\begin{aligned}\overrightarrow{OH} &= \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\\ &= (\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GA})+(\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GB})+(\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GC})\\ &= 3\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\\ &= 3\overrightarrow{OG} \text{ car G est le centre de gravité du triangle ABC}\end{aligned}$$

Donc dans un triangle, le centre de gravité, le centre du cercle cirsconscrit à ce triangle et l'orthocentre sont alignés.

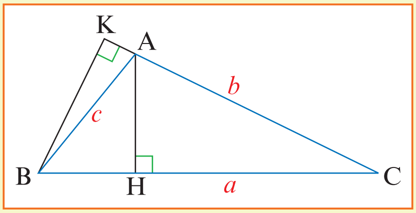
17 LOI DES SINUS

1. a. • Dans ABH rectangle en H : $\sin\widehat{B}=\dfrac{\text{côté opposé}}{\text{hypothénuse}}=\dfrac{AH}{AB}=\dfrac{AH}{c}$,

d'où $\mathbf{AH = \mathit{c}\sin\widehat{B}}$.

• Dans ACH rectangle en H : $\sin\widehat{C}=\dfrac{AH}{AC}=\dfrac{AH}{b}$, d'où $\mathbf{AH=\mathit{b}\sin\widehat{C}}$.

b. On en déduit que $c\sin\widehat{B}=b\sin\widehat{C}$ (1).



Comme ABC n'est pas plat, les angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ ont des mesures autres que 0 ou π (radians).
Donc $\sin\widehat{B}\neq 0$ et $\sin\widehat{C}\neq 0$.
On peut donc diviser chaque membre de l'égalité (1) par $\sin\widehat{B}\times\sin\widehat{C}\,(\neq 0)$, d'où :

$$\frac{\boldsymbol{c}}{\sin\widehat{\mathbf{C}}}=\frac{\boldsymbol{b}}{\sin\widehat{\mathbf{B}}}.$$

2. • Dans BKC rectangle en K, $\sin\widehat{C}=\dfrac{BK}{BC}$, d'où $BK=a\sin\widehat{C}$

• Dans BKA rectangle en K : $\sin\widehat{BAK}=\dfrac{BK}{AB}$.

Or $\widehat{BAK}=\pi-\widehat{BAC}$, donc $\sin(\widehat{BAK})=\sin\widehat{BAC}=\sin\widehat{A}$.

Voir le chapitre 9 sur les fonctions trigonométriques.

$\sin\widehat{A}=\dfrac{BK}{c}$, d'où $BK=c\sin\widehat{A}$.

• On en déduit que $a\sin\widehat{C}=c\sin\widehat{A}$, puis, comme $\sin\widehat{C}\times\sin\widehat{A}\neq 0$:

$$\frac{\boldsymbol{a}}{\sin\widehat{\mathbf{A}}}=\frac{\boldsymbol{c}}{\sin\widehat{\mathbf{C}}}.$$

3. D'après la loi des sinus, en notant $p = \text{MN}$, $m = \text{PN}$ et $n = \text{PM}$:

$$\frac{p}{\sin\hat{\text{P}}} = \frac{n}{\sin\widehat{\text{N}}}, \text{ soit } \frac{p}{\sin(20)} = \frac{200}{\sin(\widehat{\text{N}})}.$$

De plus, $\widehat{\text{M}} + \widehat{\text{N}} + \hat{\text{P}} = 180°$, donc $\widehat{\text{N}} = 180° - \hat{\text{P}} - \widehat{\text{M}} = 25°$.

Donc $p = \dfrac{200 \times \sin(20)}{\sin(25)}$.

MN vaut environ 161,86 mètres.

18 FORMULE DE CAUCHY-SCHWARZ

a. Soit t un réel.

$\|t\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (t\vec{u} + \vec{v}) \cdot (t\vec{u} + \vec{v}) = t^2\vec{u} \cdot \vec{u} + t\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot t\vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v}$

$\boldsymbol{\|t\vec{u} + \vec{v}\|^2 = t^2\|\vec{u}\|^2 + 2t\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2}$.

b. Pour tout réel t, $P(t) = \|t\vec{u} + \vec{v}\|^2 \geqslant 0$.

$P(t)$ ne change pas de signe, on est donc dans le cas : $\Delta \leqslant$ **0.**

Voir le chapitre 3 sur fonctions polynôme du second degré.

c. $P(t) = at^2 + bt + c$ avec $a = \|\vec{u}\|^2$; $b = 2\vec{u} \cdot \vec{v}$ et $c = \|\vec{v}\|^2$.

$\Delta = (2\vec{u} \cdot \vec{v})^2 - 4\|\vec{u}\|^2 \times \|\vec{v}\|^2 = 4(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 - 4\|\vec{u}\|^2 \times \|\vec{v}\|^2$.

Comme $\Delta \leqslant 0$, $4(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 \leqslant 4\|\vec{u}\|^2 \times \|\vec{v}\|^2$ d'où, en divisant par $4(>0)$:

$$\boldsymbol{(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 \leqslant \|\vec{u}\|^2 \times \|\vec{v}\|^2}.$$

d. En appliquant la fonction racine carrée qui est croissante :

$$\sqrt{(\vec{u} \cdot \vec{v})^2} \leqslant \sqrt{\|\vec{u}\|^2 \times \|\vec{v}\|^2}$$

$$|(\vec{u} \cdot \vec{v})| \leqslant \sqrt{\|\vec{u}\|^2} \times \sqrt{\|\vec{v}\|^2}$$

$$|(\vec{u} \cdot \vec{v})| \leqslant \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|.$$

Car pour tout réel x, $\sqrt{x^2} = |x|$.

11 Droites, cercles et paraboles

Dans tout ce chapitre, le plan est rapporté à un repère **orthonormal** $(O;\vec{i};\vec{j})$.

I VECTEUR NORMAL À UNE DROITE

1. Définition

Soit $\mathscr{D}$ une droite du plan. On appelle **vecteur normal** à $\mathscr{D}$ tout vecteur non nul $\vec{n}$ dont la direction est orthogonale à celle de la droite $\mathscr{D}$.
Ainsi :
- Si la droite $\mathscr{D}$ est donnée par un point et un vecteur directeur $\vec{u}$, alors un vecteur non nul $\vec{n}$ est normal à $\mathscr{D}$ si, et seulement si, $\vec{n}\cdot\vec{u}=0$.
- Si la droite $\mathscr{D}$ est donnée par deux points distincts A et B, alors un vecteur non nul $\vec{n}$ est normal à $\mathscr{D}$ si, et seulement si, $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0$.

EXEMPLES :
- Toute droite parallèle à l'axe des abscisses admet pour vecteur normal $\vec{j}$.
- Toute droite parallèle à l'axe des ordonnées admet pour vecteur normal $\vec{i}$.

2. Vecteur normal et équation cartésienne de droite

Dans tout ce paragraphe, on considère une droite $\mathscr{D}$ d'équation cartésienne :

$$ax+by+c=0$$

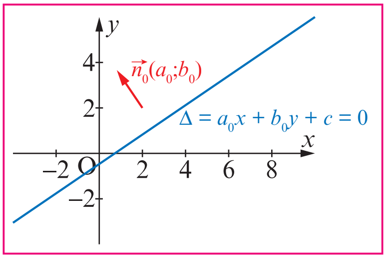
où a, b et c désignent trois réels tels que $(a;b)\neq(0;0)$.

PROPRIÉTÉ : Le vecteur $\vec{n}(a;b)$ est un vecteur normal à $\mathscr{D}$.

On rappelle que le vecteur $\vec{u}(-b;a)$ est un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}$.

CONSÉQUENCE 1 :
Les vecteurs normaux à $\mathscr{D}$ sont tous les vecteurs de la forme $k\vec{n}$, avec $k\neq0$.

CONSÉQUENCE 2 :
Soit Δ une droite de vecteur normal $\overrightarrow{n_0}(a_0;b_0)$.
Alors Δ admet une équation cartésienne de la forme $a_0x+b_0y+c=0$, le réel c restant à déterminer.



II ÉQUATION DE CERCLE

R désigne dans ce paragraphe un réel positif ou nul.
On rappelle que le cercle de centre Ω et de rayon R est l'ensemble des points M du plan tels que la distance ΩM soit égale à R.

THÉORÈME :

Un point M $(x\,;y)$ appartient au cercle de centre $\Omega\ (x_0\,;y_0)$ et de rayon R si, et seulement si,

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2.$$

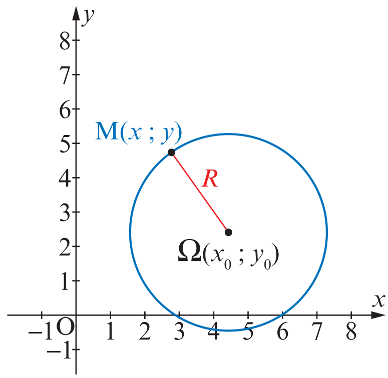
DÉFINITION :

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$ est appelé **équation cartésienne du cercle** de centre $\Omega(x_0\,;y_0)$ et de rayon R.

Plus généralement, on a le théorème suivant.

THÉORÈME :

L'ensemble des points M du plan de coordonnées $(x\,;y)$ tels que $x^2+y^2+2ax+2by+c=0$ est soit vide, soit réduit à un point, soit un cercle.



Remarque :

$x^2+y^2+2ax+2by+c=0$ s'appelle alors équation « développée » du cercle.

III PARABOLES

1. Parabole représentant un polynôme du second degré

DÉFINITION :

On appelle **parabole** toute courbe d'équation $y=ax^2+bx+c$, où a, b et c sont des réels et $a\neq 0$.

Une parabole est donc la courbe représentative d'une fonction polynômiale du second degré.

2. Sommet d'une parabole

Soit $\mathscr{P}$ une parabole d'équation $y=ax^2+bx+c$, où a , b et c sont des réels et $a\neq 0$.
En notant f la fonction polynomiale associée à la parabole $\mathscr{P}$, et en écrivant le polynôme sous sa forme canonique :

$$\boxed{f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta}.$$

On en déduit que le point $\mathrm{S}(\alpha\,;\beta)$ appartient à $\mathscr{P}$.
On appelle S le **sommet** de la parabole.

3. Axe de symétrie

PROPRIÉTÉ :

Une parabole est symétrique par rapport la droite Δ, parallèle à l'axe de ordonnées et passant par le sommet de la parabole.

> Les droites parallèles à l'axe des ordonnées admettent une équation réduite de la forme $x = c$, $c \in \mathbb{R}$.

CONSÉQUENCE :

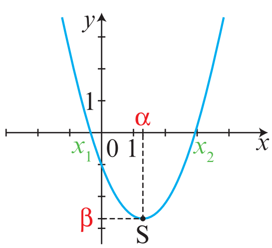
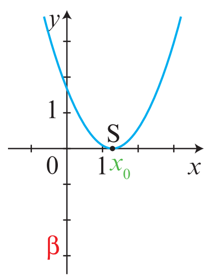
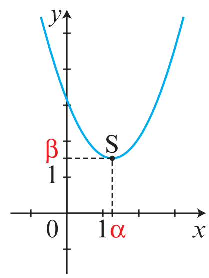
Si l'on connait deux points A et B de la parabole ayant même ordonnée, alors l'abscisse du sommet S de la parabole est donnée par la relation :

$x_S = \dfrac{x_A + x_B}{2}$ et Δ a pour équation $x = x_S$.

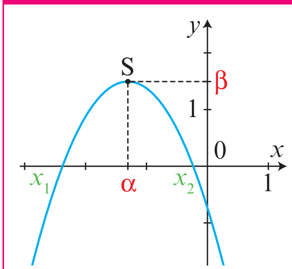
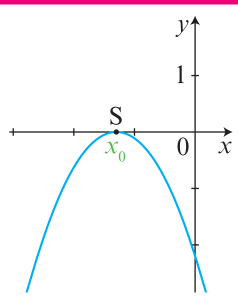
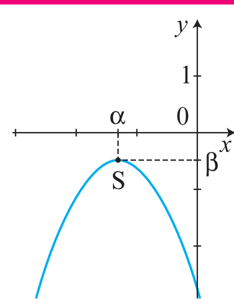
4. Position d'une parabole par rapport à l'axe des abscisses

Elle dépend du signe de a et du nombre de points d'intersection de la parabole avec l'axe des abscisses (c'est-à-dire du nombre de solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$).

• Si $a > 0$: les branches de la parabole sont orientées « vers le haut »

Deux points d'intersection	Un point d'intersection	Aucun point d'intersection
		

• Si $a < 0$: les branches de la parabole sont orientées « vers le bas »

Deux points d'intersection	Un point d'intersection	Aucun point d'intersection
		

MÉTHODE 1

Déterminer une équation cartésienne de droite à partir d'un vecteur normal

➜ Voir les exos 1, 2, 12 et 13.

On veut déterminer une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}$ dont on connait un point A et un vecteur normal $\vec{n}$.

Étape 1. Considérer un point quelconque M(x ; y) du plan, puis exprimer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AM}$ en fonction de x et y.

Étape 2. Travailler ensuite à partir de l'équivalence suivante :

$$M(x\,;y)\in\mathcal{D}\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0\,.$$

Exo résolu

Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par A(–2 ; 3) et de vecteur normal $\vec{n}(1\,;5)$.
Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{D}$.

CORRIGÉ

Étape 1. Soit M(x ; y) un point du plan. On a $\overrightarrow{AM}(x+2\,;y-3)$

Étape 2.

$$\begin{aligned} M\in(d) &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0\\ &\Leftrightarrow (x+2)\times 1+(y-3)\times 5=0\\ &\Leftrightarrow x+5y-13=0 \end{aligned}$$

$\mathcal{D}$ a pour équation $\boldsymbol{x+5y-13=0}$.

MÉTHODE 2

Déterminer une équation d'un cercle défini par son centre et son rayon

➜ Voir les exos 3 et 11.

Pour déterminer l'équation du cercle Γ de centre Ω et de rayon R :

Étape 1. Considérer un point quelconque M(x ; y) du plan, puis exprimer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\Omega M}$ en fonction de x et y.
Si besoin, calculer la valeur exacte du rayon R.

Étape 2. Travailler à partir de l'équivalence suivante :

$$M(x\,;y)\in\Gamma\Leftrightarrow \Omega M=R\Leftrightarrow \Omega M^2=R^2.$$

Élever les distances au carré permet de ne pas travailler avec des racines carrées.

Exo résolu

Dans le plan muni du repère orthonormal $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$, on considère le point $A(3;-2)$.
Déterminer une équation du cercle Γ_1 de centre O et de rayon $R = OA$.

CORRIGÉ

Étape 1. Soit $M(x;y)$ un point du plan.
$\overrightarrow{AM}(x-3;y+2)$.
$R = OA = \sqrt{3^2+(-2)^2} = \sqrt{13}$.

Étape 2.
$$\begin{aligned} M \in \Gamma_1 &\Leftrightarrow AM = R \\ &\Leftrightarrow AM^2 = 13 \\ &\Leftrightarrow (x-3)^2+(y+2)^2 = 13 \end{aligned}$$
Le cercle Γ_1 a pour équation : $(x-3)^2+(y+2)^2=13$.

MÉTHODE 3

Déterminer une équation d'un cercle défini par diamètre

➜ Voir l'exo 3.

Pour déterminer une équation du cercle Γ de diamètre $[AB]$:
Étape 1. Considérer un point quelconque $M(x;y)$ du plan, puis exprimer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ en fonction de x et y.
Étape 2. Travailler à partir de l'équivalence suivante :
$$M(x;y)\in\Gamma \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 0.$$

Exo résolu

Dans le plan muni du repère orthonormal $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$, on considère les points $A(3;-2)$ et $B(5;1)$.
Déterminer l'intersection du cercle Γ_2 de diamètre $[AB]$.

CORRIGÉ

Étape 1. Soit $M(x;y)$ un point du plan.
$\overrightarrow{MA}(x-3;y+2)$ et $\overrightarrow{MB}(x-5;y-1)$

Étape 2.
$$\begin{aligned} M\in\Gamma_2 &\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-3)(x-5)+(y+2)(y-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2-8x+15+y^2+y-2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2-8x+y^2+y+13 = 0 \end{aligned}$$
Le cercle Γ_2 a pour équation : $x^2-8x+y^2+y+13=0$.

MÉTHODE 4

Déterminer le centre et le rayon d'un cercle à partir de son équation « développée »

➜ Voir les exos 3 et 15.

Soit Γ le cercle d'équation $x^2 + ax + y^2 + by + c = 0\left(a,\ b,\ c \in \mathbb{R}\right)$.
Pour déterminer le centre et le rayon de Γ :

Étape 1. Mettre $x^2 + ax$ et $y^2 + by$ sous forme canonique comme ceci :

$$x^2 + ax = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4}.$$

Étape 2. Mettre l'équation sous la forme $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = V$.

Étape 3. Vérifier que la valeur V est strictement positive, puis calculer le rayon, qui est égal à $\sqrt{V}$.

Exo résolu

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,; \vec{i}\,; \vec{j}\right)$, on cherche à déterminer le centre et le rayon du cercle $\mathscr{C}$ d'équation :

$$x^2 + 3x + y^2 - 4y + 5 = 0.$$

CORRIGÉ

Étape 1. $x^2 + 3x + y^2 - 4y + 5 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2 \times \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + y^2 - 2 \times 2y + 2^2 - 2^2 + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + (y-2)^2 - 4 + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + (y-2)^2 = \frac{5}{4}$$

Étape 2.

$$x^2 + 3x + y^2 - 4y + 5 = 0 \Leftrightarrow \left[x - \left(-\frac{3}{2}\right)\right]^2 + (y-2)^2 = \frac{5}{4}.$$

Étape 3.

$\frac{5}{4} > 0$ donc il s'agit bien d'un cercle.

Son rayon est $R = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$, et son centre est $\Omega\left(-\frac{3}{2}\,; 2\right)$.

Le cercle Γ a pour centre $\Omega\left(-\frac{3}{2}\,; 2\right)$ et pour rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

MÉTHODE 5

Déterminer et exploiter l'axe de symétrie d'une parabole

➜ Voir les exos 4, 8, 14 et 16.

Soit $\mathscr{P}$ la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$.

Étape 1 On résout l'équation $ax^2 + bx + c = c$ pour trouver deux points de la parabole ayant même ordonnée (ici c).

Étape 2 On en déduit l'abscisse du sommet en faisant la moyenne des deux solutions trouvées.

Exo résolu

On considère la parabole dont l'équation dans un repère orthonormal $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$ est $y = -2x^2 + 5x + 3$.

a. Déterminer son axe de symétrie.

b. Sachant qu'elle coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse $x_1 = 3$, déterminer l'autre point d'intersection de la parabole avec l'axe des abscisses.

CORRIGÉ

a. Étape 1

$$\begin{aligned} -2x^2 + 5x + 3 = 3 &\Leftrightarrow -2x^2 + 5x = 0 \\ &\Leftrightarrow x(-2x+5) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 2{,}5 \end{aligned}$$

Les points A(0 ; 3) et B(2,5 ; 3) appartiennent à la parabole.

Étape 2 Il résulte de la symétrie de la parabole que son sommet S a pour abscisse $x_S = \dfrac{0+2{,}5}{2} = 1{,}25$.

La parabole admet pour axe de symétrie la droite d'équation $x = 1{,}25$.

b. Notons x_2 l'abscisse cherchée.

Par symétrie, on sait que $x_S = 1{,}25$ est la moyenne de $x_1 = 3$ et de x_2.

$$\begin{aligned} \frac{x_1+x_2}{2} = x_S \Leftrightarrow \frac{x_1+x_2}{2} &= 1{,}25 \\ \Leftrightarrow 3 + x_2 &= 2{,}5 \\ \Leftrightarrow x_2 &= -0{,}5 \end{aligned}$$

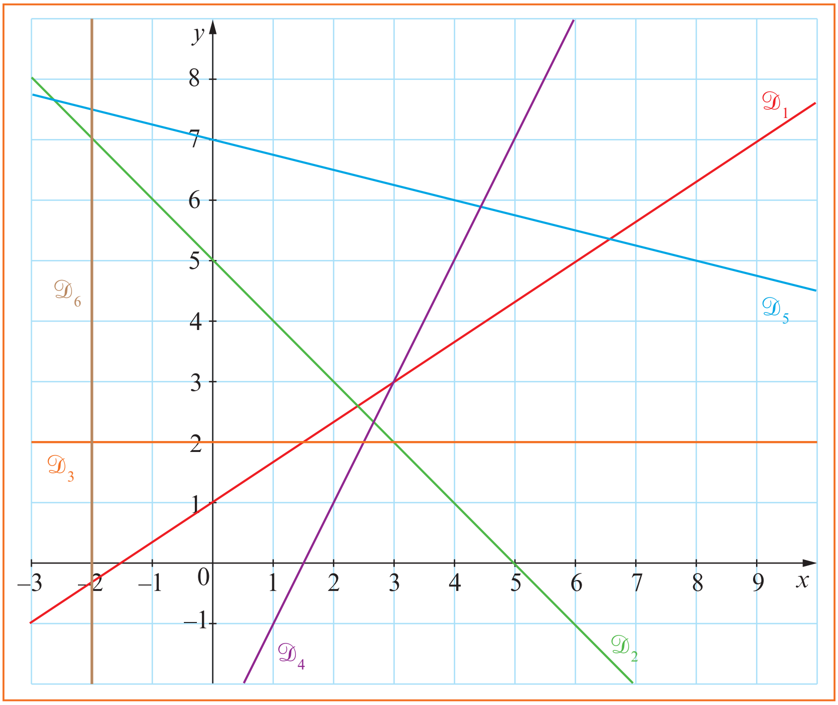
Le second point d'intersection de la parabole avec l'axe des abscisses est donc le point de coordonnées (–0,5 ; 0).

TESTER SES CONNAISSANCES

1 LECTURE GRAPHIQUE DE VECTEURS NORMAUX

★ | 20 min | ▶ P. 334

À l'aide du quadrillage, déterminer pour chaque droite un vecteur normal.



2 ÉQUATIONS DE DROITES

★ | 10 min | ▶ P. 334

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$.

a. Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par $A(-3\,;4)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n_1}(5\,;-1)$, puis de la droite $\mathscr{D}_2$ passant par $B(12\,;7)$ et de vecteur normal $\vec{j}$.

b. Déterminer un vecteur $\overrightarrow{n_3}$ normal à la droite $\mathscr{D}_3$ d'équation $3x-\dfrac{y}{2}+11=0$, puis un vecteur $\overrightarrow{n_4}$ normal à la droite $\mathscr{D}_4$ d'équation $y=-\dfrac{2x}{3}+1$.

3 ÉQUATIONS DE CERCLES

★★ | 20 min | ▸ P. 335

a. Déterminer une équation du cercle Γ_1 de diamètre $[AB]$, où $A(4;5)$ et $B(7;-5)$.

b. Déterminer une équation du cercle Γ_2 de centre $\Omega(-1;2)$ et de rayon $R = \dfrac{3}{4}$.

c. Déterminer le centre et le rayon du cercle Γ_3 d'équation $x^2 + y^2 + 6y = 0$.

Voir la méthode 4.

d. Déterminer le centre et le rayon du cercle Γ_4 d'équation :

$$x^2 - 2x + y^2 + 3y + \frac{5}{4} = 0.$$

4 PARABOLES

★ | 25 min | ▸ P. 336

On considère la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = \dfrac{x^2}{2} - 3x + 7$.

1. Quelle est « l'orientation » des branches de cette parabole ?

2. Déterminer une équation de son axe de symétrie Δ.

Voir la méthode 5.

3. Déterminer les coordonnées de son sommet S et en déduire le nombre de solutions de l'équation $\dfrac{x^2}{2} - 3x + 7 = 0$.

4. Soit $\mathscr{D}$ la droite d'équation $y = 3 - 3x$.

a. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{P}$ et de $\mathscr{D}$.

b. Représenter $\mathscr{P}$ et $\mathscr{D}$ dans un repère adapté.

5 DROITES PERPENDICULAIRES

★★ | 15 min | ▸ P. 337

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$

Soient $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ deux droites affines d'équations cartésiennes respectives $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$.

L'objectif de cette question est de démontrer que $\mathscr{D} \perp \mathscr{D}'$ si, et seulement si,

$$m \times m' = -1.$$

On note A et B les points de la droite $\mathscr{D}$ d'abscisses respectives 0 et 1.

On note A′ et B′ les points de la droite $\mathscr{D}'$ d'abscisses respectives 0 et 1.

1. a. Déterminer, en fonction de m, m', p, p', les coordonnées des points A, B, A′ et B′.

b. En déduire les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$.

c. Démontrer que $\mathscr{D} \perp \mathscr{D}'$ si, et seulement si, $m \times m' = -1$.

2. Soit $\mathscr{D}$: $y = \dfrac{2}{3}x$. détermier une équation de $\mathscr{D}'$, perpendiculaire à $\mathscr{D}$ et passant par A(1 ; 4).

6 VECTEURS ET DROITES

★★ | 20 min | ▸ P. 338

On se place dans le repère du plan $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Pour chacune des droites ci-dessous, déterminer si possible :

a. un vecteur normal $\vec{u}$ dont l'abscisse vaut 1 ;

b. un vecteur normal $\vec{v}$ dont l'ordonnée vaut 1 ;

c. un vecteur normal $\vec{w}$ dont la somme des coordonnées vaut 1.

$\mathscr{D}_1$ d'équation cartésienne $5x - 2y + 6 = 0$;

$\mathscr{D}_2$ d'équation cartésienne $2x + 5 = 0$;

$\mathscr{D}_3$ d'équation cartésienne $x - y = 0$;

$\mathscr{D}_4$ d'équation cartésienne : $y = \pi - \frac{3}{2}x$.

Voir le paragraphe II.2 du cours.

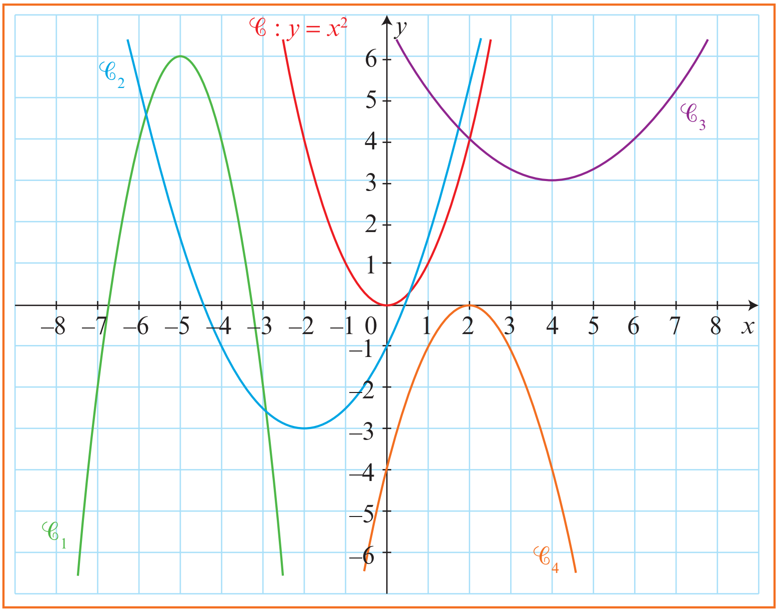
7 ALGORITHME

★★ | 15 min | ▸ P. 339

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$. Soit $\mathscr{D}$ la droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$, avec $(a;b) \neq (0;0)$. Écrire un algorithme permettant de dire si un vecteur $\vec{v}(r;s)$ est normal ou non à $\mathscr{D}$.

8 ASSOCIER UNE PARABOLE À SON ÉQUATION

★ | 10 min | ▸ P. 340



À chaque question correspond une seule bonne réponse.

Voir la méthode 3.

1. La courbe $\mathscr{C}_1$ a pour équation :

a. $y = 2(x-5)^2 + 6$ **b.** $y = 2(x+5)^2 + 6$

c. $y = -2(x-5)^2 + 6$ **c.** $y = -2(x+5)^2 + 6$

2. La courbe $\mathscr{C}_2$ a pour équation :

a. $y = \frac{1}{2}(x-2)^2 + 3$ **b.** $y = \frac{1}{2}(x-2)^2 - 3$

c. $y = -\frac{1}{2}(x+2)^2 - 3$ **bd.** $y = \frac{1}{2}(x+2)^2 - 3$

3. La courbe $\mathscr{C}_4$ admet pour axe de symétrie

a. l'axe d'équation $y = 2$ **b.** l'axe d'équation $x = 2$

c. l'axe des abscisses **d.** l'axe des ordonnées

4. Parmi les cinq paraboles représentées, combien admettent un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses ?

a. aucune **b.** une **c.** deux **d.** trois

S'ENTRAÎNER

9 DISTANCE D'UN POINT À UNE DROITE | ★★ | 20 min | ▸ P. 340

On considère un point M(–2 ; 5) et la droite $\mathscr{D}$ d'équation $3x - 4y + 8 = 0$.
Soit H le projeté orthogonal du point M sur la droite $\mathscr{D}$.

a. Donner un vecteur directeur $\vec{u}$ de $\mathscr{D}$.

b. Sachant que $\overrightarrow{HM}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux, établir une équation vérifiée par les coordonnées du point H.

c. Quelle autre équation vérifient x_H et y_H ?

d. Déduire des questions **b.** et **c.** les coordonnées du point H.

e. Calculer la distance MH.

10 PARABOLE PASSANT PAR TROIS POINTS | ★★ | 15 min | ▸ P. 340

Soit f une fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.

a. Sachant que la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ passe par les points $A(0;3)$, $B(1;0)$ et $C(3;6)$, écrire le système de trois équations à trois inconnues a, b et c correspondant.

b. Résoudre ce système.

a. $M(x;y) \in \mathscr{C}_f \Leftrightarrow y = f(x)$.
Ici, cela donne pour le point A :

$$A(0;3) \in \mathscr{C}_f \Leftrightarrow 3 = f(0) \Leftrightarrow 3 = a \times 0^2 + b \times 0 + c.$$

b. Par trois points non alignés du plan, il passe toujours une parabole et une seule.

11 CERCLE ET DROITE

★★ | 20 min | ▸ P. 341

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$

a. Démonstration de cours

Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre $\Omega(x_\Omega\,;y_\Omega)$ et de rayon $R > 0$.

Démontrer qu'un point $M(x\,;y)$ du plan appartient à $\mathscr{C}$ si, et seulement si :

$$(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = R^2.$$

b. Application

Déterminer l'intersection de la droite $\mathscr{D}$ passant par $A(1\,;2)$ et de vecteur normal $\vec{u}(-2\,;1)$ avec le cercle $\mathscr{C}$ de centre $B(1\,;1)$ et de rayon 3.

12 ENSEMBLES DE POINTS

★★★ | 35 min | ▸ P. 341

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$, on considère les points $A(-2\,;7)$ et $B(1\,;3)$ et on note I le milieu de $[AB]$.

1. Déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M du plan tels que $MA^2 - MB^2 = 0$. Construire cet ensemble et en donner une équation.

2. On veut déterminer l'ensemble $\mathscr{F}$ des points M du plan tels que :

$$MA^2 - MB^2 = -50.$$

a. Montrer que :

$$MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{AB}.$$

b. Construire le point H de la droite (AB) qui vérifie $\overrightarrow{IH}\cdot\overrightarrow{AB} = -25$.

c. Décrire alors l'ensemble $\mathscr{F}$ en justifiant.

On pourra faire apparaître le vecteur $\overrightarrow{IH}$ dans le produit scalaire $\overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{AB}$.

PRÉPARER UN CONTRÔLE

13 DROITE D'EULER

★★ | 40 min | ▸ P. 343

Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$, on considère les points A(1 ; 0), B(3 ; 0) et C(5 ; 2).

1. Faire une figure que l'on complétera au fur et à mesure.

2. Calcul des coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC

a. Déterminer les coordonnées de I, J milieux respectivement de [AB] et [BC].

b. Déterminer une équation cartésienne de la médiane issue de C et de celle issue de A du triangle ABC.

c. Déterminer les coordonnées de G point d'intersection des médianes.

3. Calcul des coordonnées du centre Ω du cercle circonscrit au triangle ABC

a. Déterminer une équation cartésienne $\Delta_{[BC]}$ de la médiatrice de [BC].

Voir la méthode 1.

b. Déterminer une équation cartésienne $\Delta_{[AB]}$ de la médiatrice de [AB].
c. Déterminer les coordonnées de Ω point d'intersection des médiatrices.
4. Calcul des coordonnées de l'orthocentre H du triangle ABC
a. Déterminer une équation cartésienne de la hauteur $\mathcal{H}_A$ issue de A du triangle ABC.
b. Déterminer une équation cartésienne de la hauteur $\mathcal{H}_C$ issue de C du triangle ABC.
c. Déterminer les coordonnées de H, point d'intersection des hauteurs.
5. Démontrer que les points Ω, G et H sont alignés.

14 COURBE REPRÉSENTATIVE D'UN POLYNÔME

★ | 20 min | P. 345

1. Soit $\mathcal{P}$ la parabole d'équation $y = x^2 - 3x + \dfrac{5}{2}$.
a. Déterminer les coordonnées du sommet S de la parabole.

Voir la méthode 4.

b. Dresser le tableau de variations de $f : x \mapsto x^2 - 3x + \dfrac{5}{2}$.
c. Tracer $\mathcal{P}$ dans un repère orthogonal adapté.
2. On considère la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $y = 9x^2 + 9$, et la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = 12x + 5$.
a. Observer $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sur un même repère à l'aide d'une calculatrice graphique. Émettre une conjecture sur le nombre de points d'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$.
b. Déterminer algébriquement les coordonnées du (ou des points) d'intersection de $\mathcal{C}$ et de $\mathcal{D}$.

On sera amené à résoudre l'équation $9x^2 + 9 = 12x + 5$ en reconnaissant une identité remarquable.

ALLER PLUS LOIN

15 ÉQUATION DE CERCLE ?

★★★ | 30 min | ▶ P. 347

Le plan est muni d'un repère orthonormal.
On considère le cercle Γ d'équation :

$$x^2 + 2ax + y^2 + 2by + c = 0\left(a,\ b,\ c \in \mathbb{R}\right).$$

a. Soient a, b, c trois constantes réelles.
Démontrer que l'équation $x^2 + 2ax + y^2 + 2by + c = 0$ est équivalente à :

$$(x+a)^2 + (y+b)^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4}.$$

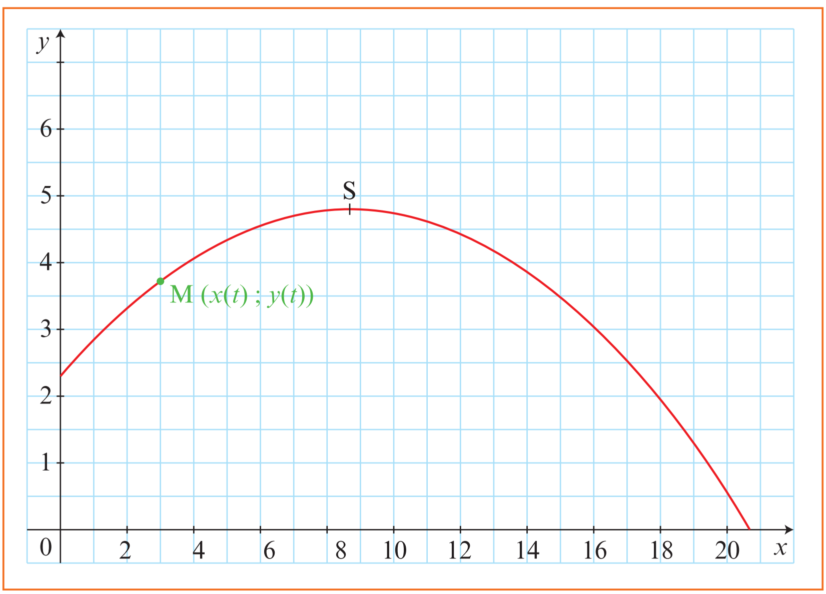
Voir la méthode 3.

b. À quelle condition, sur a, b et c, l'équation $x^2 + 2ax + y^2 + 2by + c = 0$ est-elle celle d'un cercle ? Dans ce cas, déterminer son centre et son rayon.

16 LANCER DE POIDS, TRAJECTOIRE

★★ | 30 min | ▶ P. 347

Un athlète lance un poids à une vitesse initiale de $14\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, faisant un angle de $30°$ avec l'horizontale.
À l'instant où le poids est lancé, il se situe à 2,30 mètres du sol.
Dans le repère suivant, la position du poids à l'instant t, exprimé en secondes, est donnée par ses coordonnées $\left(x(t)\,;\,y(t)\right)$.
On considère que $t = 0$ à l'instant où le poids est lancé.
On a représenté en rouge un exemple de trajectoire possible.



Les sciences physiques établissent que la trajectoire du poids en fonction du temps est donnée par :

$$\begin{cases} x(t) = (v_0 \cos\alpha)t \\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin\alpha)t + h \end{cases}$$

où v_0 désigne la vitesse initiale, α l'angle avec l'horizontale et h la hauteur initiale du poids.
On prendra $g = 9{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

a. Que valent $x(0)$ et $y(0)$? À quoi cela correspond-il ?

b. Que dire du signe de $x(t)$ et de $y(t)$?
Exprimer $x(t)$ et $y(t)$ en fonction de t uniquement.

> Les valeurs exactes des cosinus et sinus de 30° sont :
> $$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } \sin 30° = \frac{1}{2}.$$

c. Exprimer y en fonction de x.

> Noter $x = x(t)$ et $y = y(t)$ et exprimer t en fonction de x.

d. Dresser le tableau de variations de la fonction f, qui à x associe y sur l'intervalle $[d\ ;\ 0]$, où d est la distance entre le lanceur et le point d'impact au sol.

> Commencer par déterminer les coordonnées du sommet de la parabole.

e. À quelle distance le poids touche-t-il le sol ?

17 DISTANCE D'UN POINT À UNE DROITE | ★★ | 20 min | ▸ P. 349

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(\text{O}\,;\vec{i}\ ;\vec{j})$
Soit $\mathscr{D}$ la droite d'équation $ax + by + c = 0$ où a, b, c sont trois réels tels que $(a\ ;b) \neq (0\ ;\ 0)$
On veut déterminer la distance d'un point $\text{P}(x_\text{P}\ ;\ y_\text{P})$ à la droite $\mathscr{D}$, c'est-à-dire la distance PH, où H est le projeté orthogonal de P sur $\mathscr{D}$.
Soit $\text{A}(x_\text{A}\,;y_\text{A})$ un point de la droite et $\vec{n}(a\,;b)$ un vecteur normal à $\mathscr{D}$.

a. Exprimer $\overrightarrow{\text{AP}} \cdot \vec{n}$ en fonction de la distance HP.

b. Établir que la distance de P à la droite $\mathscr{D}$ est égale à :

$$\frac{|ax_\text{P} + by_\text{P} + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

> Puisque A appartient à $\mathscr{D}$, alors $c = -ax_\text{A} - by_\text{A}$.

CORRIGÉS

1 LECTURE GRAPHIQUE DE VECTEURS NORMAUX

• $\mathscr{D}_1$ admet pour vecteur normal $\overrightarrow{n_1}(2\,;-3)$. $\mathscr{D}_1$ admet donc une équation cartésienne de la forme $2x-3y+c=0$.
Le point de coordonnées (0 ; 1) est sur la droite $\mathscr{D}_1$, donc $-3+c=0$, donc $c=3$.

$$\mathscr{D}_1 : \mathbf{2x-3y+3=0}.$$

• $\mathscr{D}_2$ admet pour vecteur normal $\overrightarrow{n_2}(1\,;1)$.
$\mathscr{D}_2$ admet donc une équation cartésienne de la forme $x+y+c=0$.
Le point de coordonnées (0 ; 5) est sur la droite $\mathscr{D}_2$, donc $5+c=0$, donc $c=-5$.

$$\mathscr{D}_2 : \mathbf{x+y-5=0}.$$

• $\mathscr{D}_3$ admet pour vecteur normal $j(0\,;1)$.
$\mathscr{D}_3$ admet donc une équation cartésienne de la forme $y+c=0$.
Le point de coordonnées (0 ; 2) est sur la droite $\mathscr{D}_3$, donc $2+c=0$, donc $c=-2$.

$$\mathscr{D}_3 : \mathbf{y-2=0}.$$

• $\mathscr{D}_4$ admet pour vecteur normal $\overrightarrow{n_4}(2\,;-1)$.
$\mathscr{D}_4$ admet donc une équation cartésienne de la forme $2x-y+c=0$.
Le point de coordonnées (2 ; 1) est sur la droite $\mathscr{D}_4$, donc $4-1+c=0$, donc $c=-3$.

$$\mathscr{D}_4 : \mathbf{2x-y-3=0}.$$

• $\mathscr{D}_5$ admet pour vecteur normal $\overrightarrow{n_5}(1\,;4)$.
$\mathscr{D}_5$ admet donc une équation cartésienne de la forme $x+4y+c=0$.
Le point de coordonnées (0 ; 7) est sur la droite $\mathscr{D}_5$, donc $28+c=0$, donc $c=-28$.

$$\mathscr{D}_5 : \mathbf{x+4y-28=0}.$$

• $\mathscr{D}_6$ admet pour vecteur normal $\vec{i}(1\,;0)$.
$\mathscr{D}_6$ admet donc une équation cartésienne de la forme $x+c=0$.
Le point de coordonnées (–2 ; 0) est sur la droite $\mathscr{D}_6$, donc $-2+c=0$, donc $c=2$.

$$\mathscr{D}_6 : \mathbf{x+2=0}.$$

2 ÉQUATIONS DE DROITES

a. Soit $\mathrm{M}(x\,;y)$ un point du plan.

• $$\begin{aligned}\mathrm{M}\in\mathscr{D}_1 &\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{AM}}\cdot\vec{n}_1=0\\ &\Leftrightarrow (x+3)\times5+(y-4)\times(-1)=0\\ &\Leftrightarrow 5x-y+19=0\end{aligned}$$

Donc $\mathscr{D}_1$ a pour équation $5x-y+19=0$.

• $$\begin{aligned}\mathrm{M}\in\mathscr{D}_2 &\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{BM}}\cdot\vec{j}=0 \text{ avec } \vec{j}(0\,;1)\\ &\Leftrightarrow (x-12)\times0+(y-7)\times1=0\\ &\Leftrightarrow y=7\end{aligned}$$

Donc $\mathscr{D}_2$ a pour équation $y=7$.

b. D'après le cours, $\overrightarrow{n_3}\left(3\,;-\dfrac{1}{2}\right)$ est normal à $\mathscr{D}_3$.

Déterminons une équation cartésienne de $\mathscr{D}_2$:

$$y=-\frac{2x}{3}+1 \Leftrightarrow 3y=-2x+3$$
$$\Leftrightarrow 2x+3y-3=0.$$

Donc $\overrightarrow{n_4}(2\,;3)$ est normal à $\mathscr{D}_4$.

Il existe une infinité de solutions pour $\overrightarrow{n_3}$: tous les vecteurs dont les coordonnée sont proportionnelles à $\left(3\,;-\dfrac{1}{2}\right)$. De même pour $\overrightarrow{n_4}$.

3 ÉQUATIONS DE CERCLES

a. Soit $\mathrm{M}(x\,;y)$ un point du plan.

$$\begin{aligned}\mathrm{M}\in\Gamma_1 &\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{MA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MB}}=0\\ &\Leftrightarrow (4-x)(7-x)+(5-y)(-5-y)=0\\ &\Leftrightarrow 28-11x+x^2-25+y^2=0\\ &\Leftrightarrow x^2-11x+y^2+3=0\end{aligned}$$

Donc Γ_1 a pour équation $x^2-11x+y^2+3=0$

b. Soit $\mathrm{M}(x\,;y)$ un point du plan.

$$\begin{aligned}\mathrm{M}\in\Gamma_2 &\Leftrightarrow \Omega\mathrm{M}=R\\ &\Leftrightarrow \Omega\mathrm{M}^2=R^2\\ &\Leftrightarrow (x+1)^2+(y-2)^2=\frac{9}{16}\end{aligned}$$

Donc Γ a pour équation cartésienne $(x+1)^2+(y-2)^2=\dfrac{9}{16}$.

c.
$$\begin{aligned}x^2+y^2+6y=0 &\Leftrightarrow x^2+y^2+6y+3^2-3^2=0\\ &\Leftrightarrow x^2+(y+3)^2-9=0\\ &\Leftrightarrow (x-0)^2+(y-(-3))^2=3^2\\ &\Leftrightarrow \mathrm{PM}^2=3^2 \text{ avec } \mathrm{P}(0\,;-3)\,.\end{aligned}$$

Donc le cercle Γ_3 a pour centre $\mathrm{P}(0\,;-3)$ et pour rayon 3.

d. $x^2-2x+y^2+3y+\dfrac{5}{4}=0$

$$\Leftrightarrow x^2-2x+1^2+y^2+2\times\frac{3}{2}y+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2+\frac{5}{4}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2-1+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+\frac{5}{4}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2+\left(y-\left(-\frac{3}{2}\right)\right)^2=2$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{QM}^2=\sqrt{2}^2 \text{ avec } \mathrm{Q}\left(1\,;-\frac{3}{2}\right).$$

Donc Γ_4 a pour centre $\mathrm{Q}\left(1\,;-\dfrac{3}{2}\right)$ et pour rayon $\sqrt{2}$.

4 PARABOLES

1. Cette parabole admet une équation de la forme $y = ax^2 + bx + c$ avec $a = \frac{1}{2}$.
$a > 0$ donc les branches de cette parabole sont tournées « vers le haut ».

2. Cherchons deux points de la parabole de même ordonnée 7.

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{2} - 3x + 7 = 7 &\Leftrightarrow \frac{x^2}{2} - 3x = 0\\ &\Leftrightarrow x \times \left(\frac{x}{2} - 3\right) = 0\\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } \frac{x}{2} - 3 = 0\\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 6\,.\end{aligned}$$

Les points de coordonnées (0 ; 7) et (6 ; 7) appartiennent à la parabole.

On en déduit que son axe de symétrie Δ a pour équation $x = \frac{0+6}{2}$, soit $x = 3$.

3. Son sommet S a donc pour abscisse $x_s = 3$ et pour ordonnée :

$$y_s = \frac{3^2}{2} - 3 \times 3 + 7 = \frac{5}{2}\,.$$

Donc $S\left(3\,;\frac{5}{2}\right)$.

La parabole a ses branches tournées « vers le haut » et l'ordonnée de son sommet est positive donc la parabole ne coupe pas l'axe des abscisses.

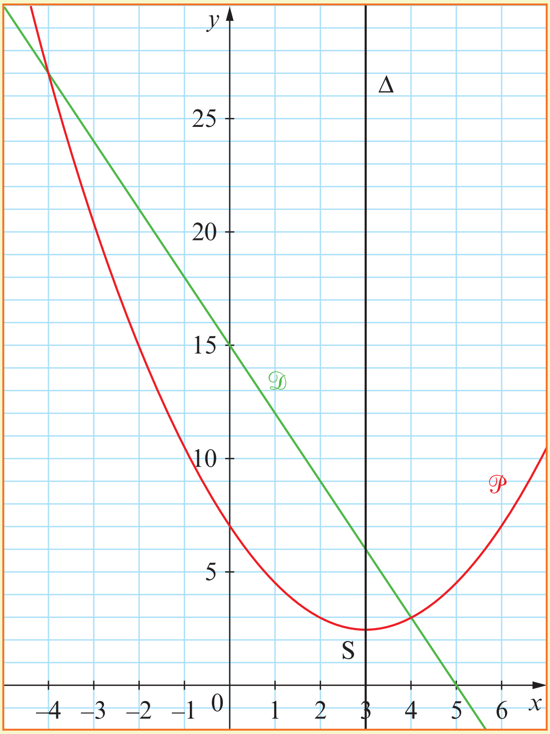
L'équation $\frac{x^2}{2} - 3x + 7 = 0$ n'admet pas de solution.

4. a. Soit $M(x\,;y)$ un point du plan.

$$\begin{aligned}M \in \mathscr{P} \cap \mathscr{D} &\Leftrightarrow \begin{cases} M \in \mathscr{P}\\ M \in \mathscr{D}\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{x^2}{2} - 3x + 7\\ y = 15 - 3x\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{2} - 3x + 7 = 15 - 3x\\ y = 15 + 3x\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{2} = 8\\ y = 15 - 3x\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 16\\ y = 15 - 3x\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \text{ ou } x = -4\\ y = 15 - 3x\end{cases}\\ &\Leftrightarrow (x = 4 \text{ et } y = 15 - 3 \times 4 = 3) \text{ ou } (x = -4 \text{ et } y = 27)\end{aligned}$$

Les points d'intersection de $\mathscr{P}$ et de $\mathscr{D}$ ont donc pour coordonnées (4 ; 3) et (–4 ; 27).

b.



5 DROITES PERPENDICULAIRES

1. a. La droite $\mathscr{D}$ a pour équation $y = mx + p$.

$A(0\,;y_A) \in \mathscr{D}$, donc :

$$y_A = m \times 0 + p = p\,.$$

$B(1\,;y_B) \in \mathscr{D}$, donc :

$$y_B = m \times 1 + p = m + p\,.$$

De même, $A'(0\,;y_{A'}) \in \mathscr{D}'$, donc :

$$y_{A'} = m' \times 0 + p' = p'\,.$$

$B'(1\,;y_{B'}) \in \mathscr{D}'$, donc :

$$y_{B'} = m' \times 1 + p' = m' + p'\,.$$

b. $\overrightarrow{AB}(m + p - p\,;1 - 0)$, donc $\overrightarrow{AB}(1\,;m)$.

$\overrightarrow{A'B'}(m' + p' - p'\,;1 - 0)$, donc $\overrightarrow{A'B'}(1\,;m')$.

c. $\mathscr{D} \perp \mathscr{D}' \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{A'B'} \Leftrightarrow 1 \times 1 + m \times m' = 0 \Leftrightarrow m \times m' = -1.$

2. Notons $y = m'x + p'$ l'équation réduite de $\mathscr{D}'$.

$\mathscr{D} \perp \mathscr{D}'$, donc $\frac{2}{3} \times m' = -1$, d'où $m' = -\frac{3}{2}$.

$A \in \mathscr{D}'$, donc $4 = -\frac{3}{2} \times 1 + p'$, donc $p' = 4 + \frac{3}{2} = \frac{11}{2}$.

$\mathscr{D}'$ a pour équation : $\boldsymbol{y = -\frac{3}{2}x + \frac{11}{2}}$.

6 VECTEURS ET DROITES

• $\vec{n}(5\,;-2)$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}_1$.
Donc tout vecteur de la forme $k\cdot\vec{n}$ est normal à $\mathcal{D}_1$.

a. Avec $k=\dfrac{1}{5}$, on obtient le vecteur $\vec{u}\left(1\,;-\dfrac{2}{5}\right)$, normal à $\mathcal{D}_1$.

b. Avec $k=-\dfrac{1}{2}$, on obtient le vecteur $\vec{u}\left(-\dfrac{5}{2}\,;1\right)$, normal à $\mathcal{D}_1$.

c. $5\times k+(-2)\times k=1 \Leftrightarrow 3\times k=1$.

$$\Leftrightarrow k=\frac{1}{3}$$

Donc $\vec{w}\left(\dfrac{5}{3}\,;\dfrac{-2}{3}\right)$ est un vecteur normal à $\mathcal{D}_1$.

• **a.** $\mathcal{D}_2$ est parallèle à l'axe des ordonnées, donc $\vec{u}=\vec{i}(1\,;0)$ est un vecteur normal à la droite $\mathcal{D}_2$
b. Il n'existe pas de vecteur normal à $\mathcal{D}_2$ d'ordonnée 1.
En effet, quelque soit la valeur de k, $k\vec{u}(k\,;0)$.
c. $\vec{w}=(1\,;0)$ est le vecteur normal à $\mathcal{D}_2$ dont la somme des coordonnées vaut 1.
• **a.** $\vec{u}(1\,;-1)$ est un vecteur normal à $\mathcal{D}_3$.
b. $\vec{v}$ est un vecteur normal à $\mathcal{D}_3$ de coordonnées $(-1\,;1)$.
c. Quel que soit le réel k, $k\vec{u}(k\,;-k)$ et $k+(-k)=0$, donc **il n'existe pas de vecteur directeur de $\mathcal{D}_3$ dont la somme des coordonnées vaut 1.**

• $y=\pi-\dfrac{3}{2}x \Leftrightarrow \dfrac{3}{2}x+y-\pi=0$ et $\vec{n}\left(\dfrac{3}{2}\,;1\right)$ est donc normal à $\mathcal{D}_4$.

a. Avec $k=\dfrac{2}{3}$, on obtient le vecteur $\vec{u}\left(1\,;\dfrac{2}{3}\right)$, normal à $\mathcal{D}_4$.

b. $\vec{v}=\vec{n}$ convient.

c. $\vec{w}=k\vec{n}\left(k\times\dfrac{3}{2}\,;k\right)$.

Or $\dfrac{3}{2}k+k=1 \Leftrightarrow \dfrac{5}{2}k=1$

$$\Leftrightarrow k=\frac{5}{2}.$$

Donc $\vec{w}\left(\dfrac{3}{5}\,;\dfrac{2}{5}\right)$ **est un vecteur normal à $\mathcal{D}_4$, dont la somme des coordonnées vaut 1**.

7 ALGORITHME

Étant donnée une droite d'équation $ax+by+c=0$ (on supposera que a et b sont non tous deux nuls), on sait que le vecteur $\vec{v}(-b\,;a)$ est un vecteur directeur de la droite.
Pour tester le vecteur $\vec{u}(x\,;y)$, il suffit alors de tester si le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est nul ou non :

```
def vecteurNormalOuNon(droite,vect):
   vectdirecteur=[-droite[1],droite[0]]
   pdtScalaire=0
   for i in range(len(vect)):
     pdtScalaire+=vect[i]*vectdirecteur[i] ;
     if pdtScalaire==0 and vect!=[0,0]:
       print('le vecteur ',vect,' est un vecteur normal à la
       droite')
     else :
       print("le vecteur ",vect, " n'est pas un vecteur
       normal à la droite")

# Test de la fonction vecteurNormalOuNon :
droite=[2,1,3]
vect1=[0,1]
vecteurNormalOuNon(droite,vect1)

vect2=[2,1]
vecteurNormalOuNon(droite,vect2)

vect3=[0,0]
vecteurNormalOuNon(droite,vect3)
```

Remarque : le vecteur $\vec{n}(a\,;\,b)$ est un vecteur normal de la droite, on aurait pu aussi tester si le déterminant de $\vec{u}$ et $\vec{n}$ est nul ou non (on rappelle que $\det(\vec{u}\,;\vec{n})=x\times b-y\times a$).

CORRIGÉS

8 ASSOCIER UNE PARABOLE À SON ÉQUATION

1. Réponse d.
La parabole $\mathscr{C}_1$ a pour sommet $S_1(-5\,;6)$ donc son équation est de la forme $y = a(x-(-5))^2+6$, soit $y = a(x+5)^2+6$.
Ses branches étant tournées vers le bas, on en déduit que $a<0$.

2. Réponse b.
La parabole $\mathscr{C}_2$ a pour sommet $S_2(-2\,;-3)$ donc son équation est de la forme $y = a(x-(-2))^2+(-3)$, soit $y = a(x+2)^2-3$.
Ses branches étant tournées vers le haut, on en déduit que $a>0$.

3. Réponse b.

4. Réponse c : les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}_4$.

9 DISTANCE D'UN POINT À UNE DROITE

a. $\vec{u}(4\,;3)$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$.

b. $\overrightarrow{HM}(-2-x_H\,;5-y_H)$ donc :

$$\overrightarrow{HM}\cdot\vec{u} = (-2-x_H)\times 4+(5-y_H)x3 = -4x_H-3y_H+7 \quad .$$

$\overrightarrow{HM}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux, donc $\overrightarrow{HM}\cdot\vec{u}=0$ et donc $-4x_H-3y_H+7=0$.

c. $H\in\mathscr{D}$, donc $3x_H-4y_H+8=0$.

d. $\begin{cases}-4x_H-3y_H+7=0 & (\times 3)\\ 3x_H-4y_H+8=0 & (\times 4)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-12x_H-9y_H+21=0\\ 12x_H-16y_H+32=0\end{cases}$

D'où, en ajoutant membre à membre, $-25y_H+53=0$.
Donc $\boldsymbol{y_H = 2{,}12}$.
En remplaçant y_H par sa valeur dans l'équation du c., on obtient
$3x_H-4\times 2{,}12+8=0$, soit $3x_H = 0{,}48$
$\boldsymbol{x_H = 0{,}16.}$

e. $HM = \sqrt{2{,}16^2+2{,}88^2} = \sqrt{4{,}6656+8{,}2944} = \sqrt{12{,}96} = 3{,}6.$

10 PARABOLE PASSANT PAR TROIS POINTS

a.

$$\begin{cases}A\in\mathscr{C}_f\\ B\in\mathscr{C}_f\\ C\in\mathscr{C}_f\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3=f(0)\\ 0=f(1)\\ 6=f(3)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3=c\\ 0=a+b+c\\ 6=9a+3b+c\end{cases}$$

b. Notons (S) ce système

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases}c=3\\ a+b=-3\\ 9a+3b=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}c=3\\ b=-3-a\\ 3a+b=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}c=3\\ b=-3-a\\ 3a-3-a=1\end{cases}$$

Donc f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2-5x+3$.

11 CERCLE ET DROITE

a. $M(x\,;y) \in \mathscr{C} \Leftrightarrow \Omega M = R$

$\Leftrightarrow \Omega M^2 = R^2$ (car une distance est > 0).

$\Leftrightarrow (x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = R^2$.

b. • D'après **a.**, un point $M(x\,;y)$ du plan appartient à $\mathscr{C}$ si, et seulement si ,

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 9.$$

• La droite $\mathscr{D}$ admet une équation de la forme $-2x + y + c = 0$.

$A(1;2) \in \mathscr{D}$, donc $-2\times 1 + 2 + c = 0$, soit $c = 0$.

Une équation cartésienne de $\mathscr{D}$ est donc : $\mathbf{-2x + y = 0}$.

Finalement, $M(x\,;y) \in \mathscr{D} \cap \mathscr{C} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y = 0 \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 = 9 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ (x-1)^2 + (2x-1)^2 = 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ 5x^2 - 6x - 7 = 0 \end{cases}$$

$\Delta = (-6)^2 - 4\times 5\times(-7) = 176 > 0$, donc l'équation $5x^2 - 6x - 7 = 0$ admet deux solutions. Comme $\sqrt{\Delta} = 4\sqrt{11}$, ce sont :

$$x_1 = \frac{6+4\sqrt{11}}{10} = \frac{3+2\sqrt{11}}{5} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{6-4\sqrt{11}}{10} = \frac{3-2\sqrt{11}}{5}$$

D'où $M(x\,;y) \in \mathscr{D} \cap \mathscr{C} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ x = \dfrac{3+2\sqrt{11}}{5} \end{cases}$ ou $\begin{cases} y = 2x \\ x = \dfrac{3-2\sqrt{11}}{5} \end{cases}$

Conclusion : $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ sont sécants aux points :

$$\mathbf{P}\left(\frac{\mathbf{3+2\sqrt{11}}}{\mathbf{5}}\,;\frac{\mathbf{6+4\sqrt{11}}}{\mathbf{5}}\right) \text{ et } \mathbf{Q}\left(\frac{\mathbf{3-2\sqrt{11}}}{\mathbf{5}}\,;\frac{\mathbf{6-4\sqrt{11}}}{\mathbf{5}}\right).$$

12 ENSEMBLES DE POINTS

1. • $MA^2 - MB^2 = 0 \Leftrightarrow MA^2 = MB^2$

$\Leftrightarrow MA = MB$.

c'est-à-dire M appartient à la médiatrice de [AB].

$\mathscr{E}$ est la médiatrice du segment [AB].

C'est aussi la droite perpendiculaire à (AB) et passant par I.

Soit $M(x\,;y)$ un point du plan,

$M(x\,;y) \in \mathscr{E} \Leftrightarrow \overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$ avec $I\left(-\frac{1}{2};5\right)$ et $\overrightarrow{AB}(3\,;-4)$

$$\Leftrightarrow \left(-\frac{1}{2} - x\right)\times 3 + (5-y)\times(-4) = 0$$

$$\Leftrightarrow -3x + 4y - \frac{43}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow -6x + 8y - 43 = 0$$

La droite $\mathscr{E}$ a pour équation $\mathbf{-6x + 8y - 43 = 0}$.

2. a. $MA^2 - MB^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 - (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2$

$= MI^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} + IA^2 - (MI^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} + IB^2)$

$= 2\overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB}) + IA^2 - IB^2$

$= 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{BA}$

(car, I étant le milieu de [AB], IA = IB).

Ainsi, $MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB}$

b. $H \in (AB)$ et $\overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{AB} < 0$, donc les vecteurs $\overrightarrow{IH}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires de sens contraire. Donc $\overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{AB} = -IH \times AB$.

Or, $AB = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$.

D'où $\overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{AB} = -IH \times AB = -25$, donc $-IH \times 5 = -25$, donc :

IH = 5 = AB.

Pour construire H, on reporte la longueur AB à partir du point I.

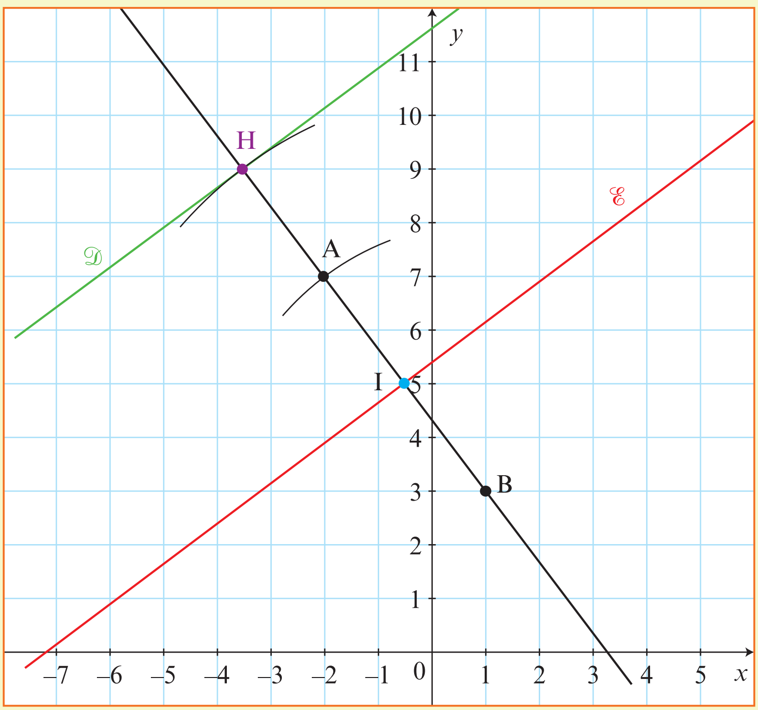
c. $MA^2 - MB^2 = -50 \Leftrightarrow 2\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} = -50 \Leftrightarrow \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} = -25$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{IH} + \overrightarrow{HM}) \cdot \overrightarrow{AB} = -25$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{HM} \cdot \overrightarrow{AB} = -25 \Leftrightarrow -25 + \overrightarrow{HM} \cdot \overrightarrow{AB} = -25$

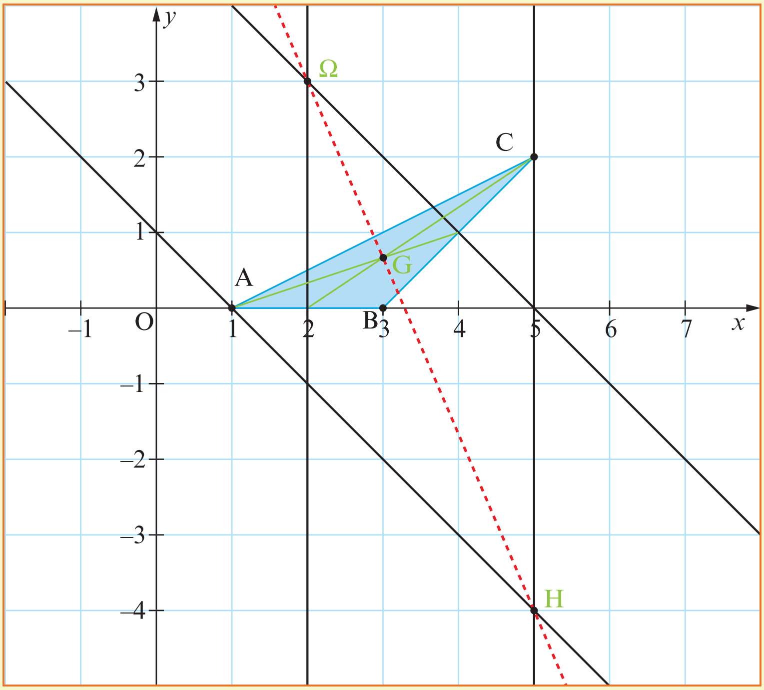
$\Leftrightarrow \overrightarrow{HM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

L'ensemble $\mathscr{F}$ est donc la droite perpendiculaire à (AB) passant par H.



13 DROITE D'EULER

1.



2. a. I(2 ; 0) et J(4 ; 1).

b. • La médiane $\mathcal{D}_C$ issue de C du triangle ABC admet une équation de la forme $ax + by + c = 0$.

$C \in \mathcal{D}_C$, donc $5a + 2b + c = 0$.

$I \in \mathcal{D}_C$, donc $2a + c = 0$.

En choisissant $c = -2$, on obtient $a = 1$ et $2b = -5a - c = -5 + 2 = -3$,

donc $b = -\dfrac{3}{2}$.

$x - \dfrac{3}{2}y - 2 = 0$ est une équation cartésienne de $\mathcal{D}_C$.

Donc $2x - 3y - 4 = 0$ est aussi une équation de $\mathcal{D}_C$.

Vérifier que les coordonnées de C et de I vérifient bien cette équation.

• La médiane $\mathcal{D}_A$ issue de A du triangle ABC admet une équation de la forme $ax + by + c = 0$.

$A \in \mathcal{D}_A$, donc $a + c = 0$.

$J \in \mathcal{D}_A$, donc $4a + b + c = 0$.

En choisissant $c = -1$, on obtient $a = 1$ et $b = -4a - c = -4 + 1 = -3$.

Donc $x - 3y - 1 = 0$ est une équation cartésienne de $\mathcal{D}_A$.

c. Soit $G(x_G ; y_G)$ le point d'intersection des médianes.

c. Soit $G(x_G\,;y_G)$ le point d'intersection des médianes.

$$G \in \mathscr{D}_C \cap \mathscr{D}_A \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_G - 3y_G - 4 = 0 \\ x_G - 3y_G - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(3y_G + 1) - 3y_G - 4 = 0 \\ x_G = 3y_G + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3y_G = 2 \\ x_G = 3y_G + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_G = \dfrac{2}{3} \\ x_G = 2 + 1 = 3 \end{cases}$$

Donc $\mathbf{G\left(3\,;\dfrac{2}{3}\right)}$.

3. a. $\Delta_{[BC]}$ a pour vecteur normal $\overrightarrow{BC}\left(2\,;2\right)$, donc admet une équation de la forme

$$2x + 2y + c = 0\,.$$

$J \in \Delta_{[BC]}$, donc $2 \times 4 + 2 \times 1 + c = 0$ donc $c = -10$.

Donc $2x + 2y - 10 = 0$ est une équation de $\Delta_{[BC]}$.

Donc $x + y - 5 = 0$ est aussi une équation de $\Delta_{[BC]}$.

b. $\Delta_{[AB]}$ a pour vecteur normal $\vec{i}(1\,;0)$, donc admet une équation de la forme

$$x + c = 0\,.$$

Or, $I \in \Delta_{[AB]}$, donc $2 + c = 0$, donc $c = -2$.

Donc $x - 2 = 0$ est une équation de $\Delta_{[AB]}$.

c. $\Omega(x_\Omega\,;y_\Omega) \in \Delta_{[AB]} \cap D_{[BC]} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x + y - 5 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -2 + 5 = 3 \end{cases}$$

Le point d'intersection des médiatrices est $\Omega\ (2\,;3)$.

4. a. $\mathscr{H}_A$ a pour vecteur normal $\overrightarrow{BC}(2\,;2)$, donc h_A admet une équation de la forme $2x + 2y + c = 0$.

$A \in \mathscr{H}_A$, donc $2 \times 1 + 2 \times 0 + c = 0$ donc $c = -2$.

Donc $2x + 2y - 2 = 0$, mais aussi $x + y - 1 = 0$ sont des équations cartésiennes de la droite $\mathscr{H}_A$.

b. $\mathscr{H}_C$ a pour vecteur normal $\overrightarrow{AB}(2\,;0)$, donc $\mathscr{H}_C$ admet une équation de la forme $2x + c = 0$.

$C \in \mathscr{H}_C$, donc $2 \times 5 + c = 0$, donc $c = -10$.

Donc $2x - 10 = 0$, mais aussi $x - 5 = 0$ sont des équations cartésiennes de h_C.

c. $H(x_H\,;y_H) \in \mathscr{H}_A \cap \mathscr{H}_C \Leftrightarrow \begin{cases} x_H + y_H - 1 = 0 \\ x_H - 5 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_H = 1 - 5 = 4 \\ x_H = 5 \end{cases}$$

Donc $H(-4\,;5)$.

5. Montrons que les vecteurs $\overrightarrow{\Omega G}$ et $\overrightarrow{\Omega H}$ sont colinéaires :

$\overrightarrow{\Omega G}\left(3-2\,;\dfrac{2}{3}-3\right)$, soit $\overrightarrow{\Omega G}\left(1\,;\dfrac{-7}{3}\right)$.

$\overrightarrow{\Omega H}\,(5-2\,;-4-3)$, soit $\overrightarrow{\Omega H}\,(3\,;-7)$.

On en déduit $\overrightarrow{\Omega H}=3\,\overrightarrow{\Omega G}$; les points Ω, G et H sont donc alignés.

14 COURBE REPRÉSENTATIVE D'UN POLYNÔME

1. a. Résolvons l'équation $x^2-3x+\dfrac{5}{2}=\dfrac{5}{2}$:

$$x^2-3x+\frac{5}{2}\Leftrightarrow x^2-3x=0\Leftrightarrow x(x-3)=0\Leftrightarrow x=0 \text{ ou } x=3\,.$$

Les points de la parabole d'abscisses 0 et 3 ont la même ordonnée donc, par symétrie, on sait que l'abscisse du sommet est $x_S=\dfrac{0+3}{2}=\dfrac{3}{2}$.

Comme S $\in\mathscr{P}$, on a :

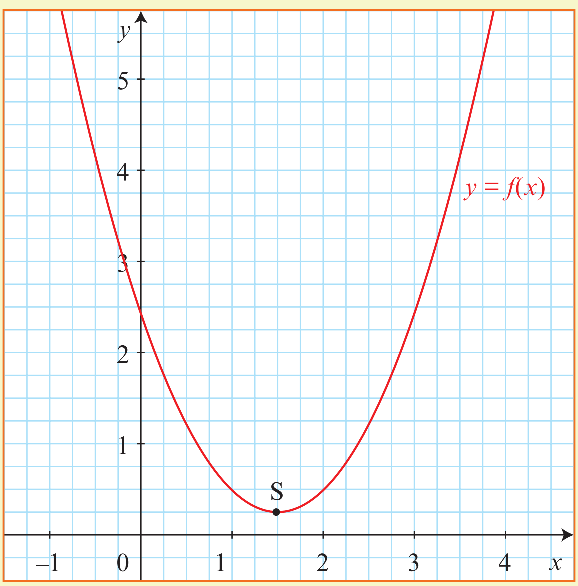
$$y_S=x_S{}^2-3x_S+\frac{5}{2}=\left(\frac{3}{2}\right)^2-3\times\frac{3}{2}+\frac{5}{2}=\frac{9}{4}-\frac{4}{2}=\frac{9}{4}-\frac{8}{4}=\frac{1}{4}$$

Finalement, $\mathbf{S}\left(\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\,;\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\right)$.

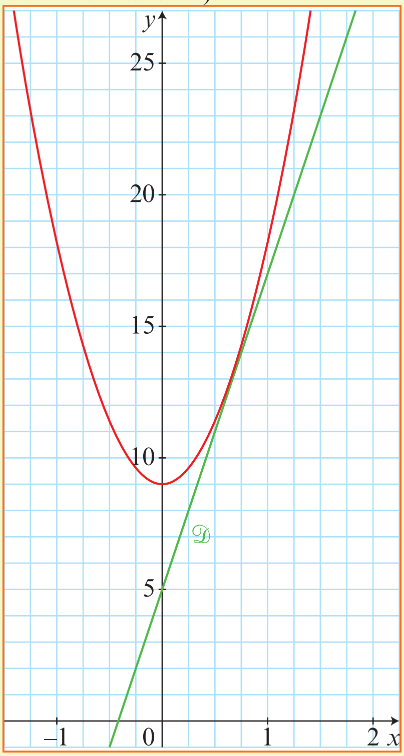
b. Comme $a=1>0$, on a :

x	$-\infty$	$\dfrac{3}{2}$	$+\infty$
Variations de f	↘	$\dfrac{1}{4}$	↗

c.



2. a. Il semble qu'il y ait un point d'intersection (la droite semble être tangente à la courbe, voir le chapitre « Dérivation »).



b. Soit $M(x\,;y)$ un point du plan.

$$M \in \mathscr{C} \cap \mathscr{D} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 9x^2 + 9 \\ y = 12x + 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 12x + 5 \\ 9x^2 + 9 = 12x + 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 12x + 5 \\ 9x^2 - 12x + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 12x + 5 \\ (3x - 2)^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 12x + 5 \\ x = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2}{3} \\ y = 13 \end{cases}$$

Donc les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ admettent un unique point d'intersection, le point $I\left(\dfrac{2}{3}\,;13\right)$.

15 ÉQUATION DE CERCLE ?

a. $x^2 + ax + y^2 + by + c = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2 \times x \times \frac{a}{2} + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 + y^2 + 2 \times y \times \frac{b}{2} + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4} + c = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4}$$

b. Cette équation est celle d'un cercle si, et seulement si :

$\frac{a^2 + b^2 - 4ac}{4} > 0$ (ce qui équivaut à $a^2 + b^2 - 4c > 0$).

En effet, dans ce cas seulement,

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4} \Leftrightarrow \Omega M^2 = R^2,$$

avec $R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2} > 0$ et $\Omega\left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}\right)$.

16 LANCER DE POIDS, TRAJECTOIRE

a. À l'instant $t = 0$, le poids a pour coordonnées $(0\,; 2{,}3)$ donc :

$x(0) = 0$: distance parcourue ; $y(0) = 2{,}3$: hauteur du poids *h*.

b. $x(t)$ étant la distance parcourue et $y(t)$ la hauteur du poids, $x(t) \geqslant 0$ et $y(t) \geqslant 0$.

De plus, $v_0 = 14$; $\alpha = 30°$ et $h = 2{,}3$.

Donc :

$$\begin{cases} x(t) = 14 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times t \\ y(t) = -\frac{1}{2} \times 9{,}8 \times t^2 + 14 \times \frac{1}{2} \times t + 2{,}3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(t) = 7\sqrt{3}t \\ y(t) = -4{,}9t^2 + 7t + 2{,}3 \end{cases}$$

c. Notons $x = x(t)$ et $y = y(t)$. Alors $t = \frac{x}{7\sqrt{3}}$, d'où :

$$y = -4{,}9 \times \frac{x^2}{49 \times 3} + 7 \times \frac{x}{7\sqrt{3}} + 2{,}3,$$

soit $\boldsymbol{y = -\frac{x^2}{30} + \frac{x}{\sqrt{3}} + 2{,}3}$.

d. Soit $f : x \mapsto -\frac{x^2}{30} + \frac{x}{\sqrt{3}} + 2{,}3$.

On veut déterminer les coordonnées du sommet S de la parabole.

Résolvons l'équation $-\dfrac{x^2}{30}+\dfrac{x}{\sqrt{3}}+2,3=2,3$:

$$-\frac{x^2}{30}+\frac{x}{\sqrt{3}}+2,3=2,3 \Leftrightarrow -\frac{x^2}{30}+\frac{x}{\sqrt{3}}=0 \Leftrightarrow x\times\left(-\frac{x}{30}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x=0 \text{ ou } \frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{x}{30}$$

$$\Leftrightarrow x=0 \text{ ou } x=\frac{30}{\sqrt{3}}=\frac{30\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{30\times\sqrt{3}}{3}=10\sqrt{3}\,.$$

Les points de la parabole d'abscisses 0 et $10\sqrt{3}$ ont la même ordonnée donc, par symétrie, on sait que l'abscisse du sommet est $x_S=\dfrac{0+10\sqrt{3}}{2}=\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$.

Comme le point S est sur la parabole, on a :

$$y_S=-\frac{(5\sqrt{3})^2}{30}+\frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{3}}+2,3=-\frac{75}{30}+\frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{3}}+2,3=-2,5+5+2,3=4,8\,.$$

Les branches de la parabole sont tournées vers le bas $\left(a=-\dfrac{1}{30}\right)$, donc :

x	$-\infty$	$5\sqrt{3}$	$+\infty$
Variations de f	2,3 ↗	4,8	↘ 0

e. Le poids touche le sol lorsque $f(x)=0$.

$$f(x)=0 \Leftrightarrow -\frac{x^2}{30}+\frac{x}{\sqrt{3}}+2,3=0\,.$$

$$\Delta=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2-4\times\frac{-1}{30}\times 2,3=\frac{1}{3}+\frac{2}{15}\times\frac{23}{10}=\frac{1}{3}+\frac{23}{75}=\frac{48}{75}\,.$$

$$\Delta>0 \text{ et } \sqrt{\Delta}=\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{75}}=\frac{\sqrt{3\times16}}{\sqrt{3\times25}}=\frac{4\sqrt{3}}{5\sqrt{3}}=\frac{4}{5}\,,$$

donc l'équation $-\dfrac{x^2}{30}+\dfrac{x}{\sqrt{3}}+2,3=0$ admet deux solutions :

$$x_1=\frac{-\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{4}{5}}{-\frac{1}{15}}=\frac{5+4\sqrt{3}}{5\sqrt{3}}\times15=\frac{5+4\sqrt{3}}{5\times3}x\sqrt{3}\times15=5\sqrt{3}+12\,,$$

$$x_2=\frac{-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{4}{5}}{-\frac{1}{15}}=\frac{5-4\sqrt{3}}{5\sqrt{3}}\times15=(5-4\sqrt{3})\times\sqrt{3}=5\sqrt{3}-12\,.$$

Mais, comme $x\geqslant0$, la solution $x_2=5\sqrt{3}-12$ ne convient pas. D'où :

$$f(x)=0 \Leftrightarrow -\frac{x^2}{30}+\frac{x}{\sqrt{3}}+2,3=0 \Leftrightarrow x=5\sqrt{3}+12\,.$$

Donc le poids touche le sol après avoir parcouru une distance égale à $12+5\sqrt{3}$, soit environ 20,66 mètres.

17 DISTANCE D'UN POINT À UNE DROITE

a. $\overrightarrow{AP}\cdot\vec{n}=(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HP})\cdot\vec{n}$

$\overrightarrow{AP}\cdot\vec{n}=\overrightarrow{AH}\cdot\vec{n}+\overrightarrow{HP}\cdot\vec{n}$

$\overrightarrow{AP}\cdot\vec{n}=0+\overrightarrow{HP}\cdot\vec{n}$ car $\vec{n}$ est orthogonal à $\mathscr{D}$, donc à $\overrightarrow{AH}$

De plus, les vecteurs $\overrightarrow{HP}$ et $\vec{n}$ étant colinéaires (car normaux à $\mathscr{D}$),

$\overrightarrow{HP}\cdot\vec{n}=\pm\text{HP}\times\|\vec{n}\|$ selon si $\overrightarrow{HP}$ et $\vec{n}$ sont de même sens ou de sens contraire.

En prenant la valeur absolue de chaque membre de l'égalité, on obtient :

$|\overrightarrow{AP}\cdot\vec{n}|=\text{HP}\times\|\vec{n}\|$

$|\overrightarrow{AP}\cdot\vec{n}|=\text{HP}\times\sqrt{a^2+b^2}$

b. La distance de P à la droite $\mathscr{D}$ est égale à HP.

$\overrightarrow{AP}\cdot\vec{n}=(x_P-x_A)\times a+(y_P-y_A)\times b=ax_P+by_P-(ax_A+by_A)$.

Or, puisque A appartient à $\mathscr{D}$, on a : $ax_A+by_A=-c$.

D'où $\overrightarrow{AP}\cdot\vec{n}=ax_P+by_P+c$.

Donc $|\overrightarrow{AP}\cdot\vec{n}|=|ax_P+by_P+c|$.

Il en résulte que $\text{HP}=\dfrac{|ax_P+by_P+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

La distance de P à la droite $\mathscr{D}$ est égale à $\dfrac{|ax_P+by_P+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

INDEX

Crédits photographiques

7 ph ©monsitj/iStock/Getty Images
27 ph ©joingate/iStock/Getty Images
93 ph ©Photobank – stock.adobe.com
225 ph ©katatonia – stock.adobe.com
291 ph ©Nikada/iStock/Getty Images

100% EXOS

Maths 1re

SPÉCIALITÉ

Pour un entraînement intensif sur mesure !

COURS & MÉTHODES	• Le cours résumé **facile à mémoriser** • Des méthodes pour **gagner en efficacité**
EXERCICES & SUJETS	• Des exercices progressifs avec **3 niveaux de difficulté** • Des sujets de contrôle **pour préparer ses devoirs sur table** • Des exercices pour aller plus loin et **préparer son entrée en Tle**
CORRIGÉS	• Tous les corrigés **détaillés** et **commentés** • Avec des **conseils** d'enseignants

LA COLLECTION 100 % EXOS AU LYCÉE

Seconde NOUVEAU BAC	Première NOUVEAU BAC	Terminale
• Maths 2de • Physique-Chimie 2de • SVT 2de	• Maths 1re • Physique-Chimie 1re • SVT 1re	• Maths Tle S spécifique • Maths Tle S spécifique & spécialité • Maths Tle ES/L • Physique-Chimie Tle S • SVT Tle S

*Selon les conditions précisées sur annabac.com

Graphisme : Grégoire Bourdin